**P1.** - Considera la matriz M y el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

(a) [3 puntos] Indica para qué valores de la matriz M es invertible.
(b) [3 puntos] Calcula, para todos los valores de a que sea posible, la inversa de M.
(c) [4 puntos] Calcula, para el caso a = 0, el vector x tal que M x = b.

a)
Para que $\exists\, M^{-1}, |M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a+1)+1-2-(a+1) = a^2-2 \quad \Rightarrow \quad a^2-2=0 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{2}$$

Por tanto, para que existe la inversa de M, $a \neq \sqrt{\pm 2}$.

Solución: $\boxed{a \neq \sqrt{\pm 2}}$

b)

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\left({}^{ADJ}M\right)^T = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & -a & a+1 \\ a-1 & 2-a & -1 \\ 1 & a^2+a-2 & -a-1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & 2-a & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{M^{-1} = \frac{1}{a^2-2}\begin{pmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -a & 2-a & a^2+a-2 \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}}$

c)

Para $a=0 \quad \Rightarrow \quad M^{-1} = \dfrac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M \cdot X = b \quad \Rightarrow \quad X = M^{-1}b \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

**P2.** - Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sea O la matriz nula de orden 2 × 2.

(a) [4 puntos] Calcula todas las matrices X tales que AX − X = B.
(b) [3 puntos] Encuentra una matriz Y diferente de O tal que (A − B)Y = O.
(c) [3 puntos] Indica todas las matrices Z que cumplen la igualdad AZ = O.

a)

$$AX - X = B \Rightarrow (A-I)X = B \Rightarrow X = (A-I)^{-1}B$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1} = \frac{1}{|A-I|}\left({}^{ADJ}(A-I)\right)^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}$

b)

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (A-B)Y = 0 \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-2c=0 \\ b-2d=0 \\ -a+2c=0 \\ -b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2c=0 \\ -b+2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2c \\ b=2d \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Solución: $\boxed{Y = \begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}}$

c)

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad AZ = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha-\gamma & 3\beta-\delta \\ 3\gamma & 3\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha-\gamma=0 \\ 3\beta-\delta=0 \\ 3\gamma=0 \\ 3\delta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Solución: $\boxed{Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$

P3. — Considera el plano $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$

(a) [3 puntos] Determina los vértices del triángulo que viene determinado por la intersección del plano con los ejes de coordenadas.
(b) [3 puntos] Calcula el área del triángulo anterior.
(c) [4 puntos] Sea A el vértice del triángulo sobre el eje de abscisas (eje OX). Calcula la recta perpendicular al plano que pasa por A.

a)
Corte con el eje X, $y = z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad A(3,0,0).$

Corte con el eje Y, $x = z = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad B(0,2,0).$

Corte con el eje Z, $x = y = 0 \quad \Rightarrow \quad z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 6 \quad \Rightarrow \quad C(0,0,6).$

Solución: $\boxed{A(3,0,0)\ ,\ B(0,2,0)\ ,\ C(0.0.6)}$

b)
Dado que el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramo determinado por dos vectores, el área del triángulo determinado por los vértices A, B y C es $área = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3,2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,0,6) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 12\hat{\imath} + 18\hat{\jmath} + 6\hat{k} \quad \Rightarrow$$

$$área = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2} = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 3\sqrt{14}\ u^2$$

Solución: $\boxed{área = 3\sqrt{14}\ u^2}$

c)
El vector normal $\vec{n}_\pi = (2,3,1)$ del plano $\pi$ es un vector director de cualquier recta perpendicular dicho plano. En particular, nosotros queremos hallar la que pasa por A. En forma paramétrica

$$r : \left\{\begin{array}{c} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Solución: $\boxed{r : \left\{\begin{array}{c} x = 3 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.}$

**P4.** — Sean a y b dos constantes reales no nulas. Consideramos el plano $\pi : x + ay - 2z = 3$ y la recta $r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0 \end{cases}$. (a) [4 puntos] ¿Para qué valores de a y b la recta r es perpendicular al plano π? Para estos casos concretos, calcula el punto de corte entre r y π, y calcula o justifica cuál es la distancia de la recta al plano.
(b) [3 puntos] ¿Para qué valores de a y b la recta r es paralela al plano π?
(c) [3 puntos] ¿Existen algunos valores de a y b para los que la recta r está contenida en el plano π?

a)
Si la recta $r$ es perpendicular al plano $\pi$, entonces el vector normal del plano y el director de la recta deben ser proporcionales

$$\vec{d}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -b\hat{i} + \hat{k} \ , \ \vec{n}_\pi = (1, a, -2) \ \Rightarrow \ \vec{n}_\pi \propto \vec{d}_r \ \Rightarrow \ \frac{-b}{1} = \frac{0}{a} = \frac{1}{-2}$$

, lo cual no tiene solución y por tanto la recta nunca será perpendicular al plano.

b) c)
Sean las matrices M formado por los vectores normales de los tres planos y M* la matriz formada por los tres vectores normales de los tres planos y los términos independientes.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ M^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 3 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de M por lo menos es 2, ya que dos de esos planos se cortan a lo largo de una recta $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

$$rang(M) = \begin{cases} 2 \ \Rightarrow \begin{cases} rang(M^*) = 2 \ \Rightarrow \ recta\ contenida\ en\ el\ plano \\ rang(M^*) = 3 \ \Rightarrow \ recta\ paralela\ al\ plano \end{cases} \\ 3 \ \Rightarrow \ rang(M^*) = 3 \ \Rightarrow \ recta\ y\ plano\ secantes \end{cases}$$

Analicemos el rango de M en función de a.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ -2 - b = 0 \ \ b = -2$$

Si b ≠ -2, entonces la recta y el plano serán secantes. $rang(M) = rang(M^*) = 3$

Si b = -2 entonces la recta y el plano son paralelos. $rang(M) = 2 \neq rang(M^*) = 3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \ \Rightarrow \ rang(M) = 2$$

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \ \Rightarrow \ rang(M^*) = 3$$

En ningún caso la recta estará contenida en el plano.

Solución: $\boxed{\begin{matrix} b=-2 \ recta \ y \ plano \ paralelos \\ b\neq -2 \ recta \ y \ plano \ secantes \end{matrix}}$

**P5.** - La cantidad de toneladas de agua infectada por una bacteria se espera que siga la función $f(x) = e^x + 0.15x + 1$ siendo $x \geq 0$ los días de infección y $f(x)$ las toneladas de agua infectada.

(a) [4 puntos] ¿Cuántas toneladas de agua había inicialmente infectadas por la bacteria? ¿Hacia qué valor tiende la cantidad de agua infectada? Interpreta los resultados.
(b) [4 puntos] ¿En qué momento hay menos cantidad de agua infectada? ¿Cuántas toneladas hay en ese momento?
(c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que el agua no esté infectada? Justifica la respuesta.

a)

$$f(0) = e^{-0} + 0.15 \cdot 0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

En el instante inicial el agua hay 2 toneladas de agua infectada.

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = e^{-\infty} + 0.15\infty + 1 = 0 + \infty + 1 = \infty$$

A largo plazo todo el agua quedará infectada.

b)
Estudiamos la monotonía de la función.

$$f'(x) = -e^{-x} + 0.15 \quad \Rightarrow \quad -e^{-x} + 0.15 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\ln 0.15$$

| $0$ | | $-\ln 0.15$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | ↘ | $1.43$ | ↗ | |

El mínimo absoluto se produce a los 1.897 días aproximadamente y la cantidad de agua infectada es de 1.43 toneladas.

Solución: $\boxed{Mínimo\ (1.897\ días, 1.43\ toneladas)}$

c)
El agua no estaría infectada cuando $f(x) = 0$. La función $f(x) > 0\ \forall\ x \in [0, \infty)$. La función empieza en 2 toneladas, decrece hasta 1.43 toneladas y a partir de ahí crece indefinidamente, por tanto nunca cortará al eje de abscisas y el agua siempre permanecerá infectada.

**P6.** - [10 puntos] Representa la región comprendida entre la curva $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, el eje de abscisas (eje OX) y las rectas x = 0 y x = 7. Calcula su área.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

i. Dominio. $Dom\ f(x)=\mathbb{R}$

ii. Cortes con los ejes. $(0,0)\begin{cases} f(0)=0 \ \Rightarrow \ (0,0) \\ f(x)=0 \ \Rightarrow \ \frac{2x}{x^2+1}=0\ ,\ 2x=0\ ,\ x=0 \ \Rightarrow \ (0,0)\end{cases}$

iii. Signo

| | $-\infty$ | | $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | - | $0$ | + | |

iv. Asíntotas

- Verticales no hay

- Horizontales $x=0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{-\infty}=0^-$$

v. Monotonía

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} \ \Rightarrow \ \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \ \Rightarrow \ -2x^2+2=0 \ \Rightarrow \ x=\pm 1$$

| | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | $0$ | - | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

vi. Gráfica

$$\acute{A}rea = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^7 = \ln 50 - \ln 1 = \ln 50 \ u^2$$

Solución: $\boxed{\acute{A}rea = \ln 50 \ u^2}$

**P7.** - Un espacio muestral contiene dos sucesos A y B. Sabiendo que P (A ∩ B) = 0.3, P (A/B) = P (B/A) y P ($A^c$) = 0.4 (siendo $A^c$ el suceso complementario), calcula:

(a) [2 puntos] P (B/A).
(b) [3 puntos] P (B).
(c) [3 puntos] P ($A^c$ ∩ $B^c$).
(d) [2 puntos] Son A y B sucesos independientes?

a)
$$P(B/A)=\frac{P\,(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{1-P(A^c)}=\frac{0.3}{1-0.4}=\frac{1}{2}$$

Solución: $\boxed{P(B/A)=0.5}$

b)
$$P(A/B)=P(B/A)\;\Rightarrow\;\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\;\Rightarrow\;\frac{1}{P(B)}\frac{1}{P(A)}\;\Rightarrow\;P(B)=P(A)=1-P(A^c)=1-0.4=0.6$$

Solución: $\boxed{P(B)=0.6}$

c)
$$P(A^c\cap B^c)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-0.6-0.6+0.3=0.1$$

Solución: $\boxed{P(A^c\cap B^c)=0.1}$

d)
A y B son sucesos independientes si

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\;\Rightarrow\;0.3\neq 0.6\cdot 0.6\;\Rightarrow\;0.3\neq 0.36\;\Rightarrow\;A\ y\ B\ dependientes$$

Solución: $\boxed{\text{A y B son dependientes}}$

**P8.** - El peso de los recién nacidos sigue una distribución normal de media μ = 3.1 kg y desviación típica σ desconocida. Se sabe que sólo el 30.5% de los recién nacidos pesa más de 3.8 kg. Calcula, redondeando los resultados a 4 decimales,

(a) [4 puntos] ¿Cuál es la desviación típica?
(b) [3 puntos] Suponiendo que σ = 1.3725, cuál es la probabilidad de que un recién nacidos pese menos de 2.7 kg?
(c) [3 puntos] Suponiendo que σ = 1.3725, cuál es la probabilidad de que un recién nacidos pese entre 2.7 y 3.5 kg?

a)

$$P(X > 3.8) = P\left(Z > \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 0.3050 \;\Rightarrow\; P\left(Z < \frac{3.8 - 3.1}{\sigma}\right) = 1 - 0.3050 \;\Rightarrow\; \frac{0.7}{\sigma} = 0.51 \;\Rightarrow\; \sigma = 1.3725$$

Solución: $\boxed{\sigma = 1.3725}$

b)

$$P(X < 2.7) = P\left(Z < \frac{2.7 - 3.1}{1.3725}\right) = P(Z < -0.29) = P(Z > 0.29) = 1 - P(Z < 0.29) = 1 - 0.6141 = 0.3859$$

Solución: $\boxed{P(X < 2.7) = 0.3859}$

c)

$$P(2.7 < X \leq 3.5) = P\left(\frac{2.7 - 3.1}{1.3725} < Z \leq \frac{3.5 - 3.1}{1.3725}\right) = P(-0.29 < Z \leq 0.29) = P(Z \leq 0.29) - P(Z < 0.29) =$$

$$= P(Z \leq 0.29) - (1 - P(Z \leq 0.29)) = 2 \cdot P(Z \leq 0.29) - 1 = 2 \cdot 0.6141 - 1 = 0.2282$$

Solución: $\boxed{P(2.7 < X \leq 3.5) = 0.2282}$