1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}$$

(a) Estudia el rango de la matriz A según los valores de a. (6 puntos)
(b) Determina para qué valores de la matriz A es invertible. (1 punto)
(c) Para el valor de a = -1 calcula la solución, X, de la ecuación matricial (3 puntos)

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)
Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & a \\ a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a^2 \end{vmatrix} = a^6 + a^2 + a^2 - a^4 - a^2 - a^4 = a^6 - 2a^4 + a^2 = a^2(a^4 - 2a^2 + 1) = a^2(a^2-1)^2 = 0$$

Y las soluciones son $\begin{matrix} a^2 = 0 & \Rightarrow & a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 & \Rightarrow & a = 1; -1 \end{matrix}$.

Si $a \neq 0; 1; -1$, entonces $Ran(A) = 3$.

Si $a = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Ran(A) = 2$.

Si $a = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F_1 = F_2 = F_3$ entonces $Ran(A) = 1$.

Si $a = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $F_2 = F_3 = -F_1$, entonces $Ran(A) = 1$.

b)
Para que $\exists\ A^{-1}, |A| \neq 0$. Por tanto sólo existirá inversa si $a \neq 0; 1; -1$.

c)
Se trata de un sistema homogéneo y por tanto $Ran(A) = Ran(A^*)$. Como $Ran(A) = 1$ tenemos un sistema compatible indeterminado, dependiente de 2 parámetros (n.º de incógnitas - Ran(A)). El sistema equivalente se reduce a una única ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y - z = 0\ ,\ y = \lambda \in \mathbb{R}, z = \mu \in \mathbb{R};\ x = \lambda + \mu$$

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula A^t, A^2 y A^{-1}, donde A^t es la matriz traspuesta y A^{-1} la inversa. (3 puntos)

(b) Sea I la matriz identidad. Resuelve X de la ecuación

$$A^2 - 2AX + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$ (3 puntos)

(c) Calcula todas las matrices B para las que se tiene que

$$A \cdot B = B \cdot A^t$$ (4 puntos)

a)

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^2 - 2AX + I = C \;,\; A^2 + I - C = 2AX \;,\; A^{-1}(A^2 + I - C) = 2X$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\right) = 2X \;,\; \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2X \;,\; \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 2X$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2a+b \\ c+d & 2c+d \end{pmatrix}$$

Igualando término con término

$$\left.\begin{array}{lcl} a+c=a+b & \Rightarrow & c=b \\ b+d=2a+b & \Rightarrow & d=2a \\ 2a+c=c+d & \Rightarrow & 2a=d \\ 2b+d=2c+d & \Rightarrow & b=c \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$$

3. Considera la función

$$f(x) = \frac{1}{x^4}$$

(a) Represéntala gráficamente. (7 puntos)
(b) Comprueba que $f(2) = f(-2)$. (1 punto)
(c) Comprueba que no existe $c \in [-2, 2]$ que $f'(c) = 0$. (1 punto)
(d)¿Hay una contradicción con la conclusión del teorema de Rolle? (1 punto)

a)
Dominio: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
Cortes con los ejes: no hay.
Simetrías: función par o simétrica $f(x) = f(-x)$
Signo de la función:

$\mathbb{R}$		0	
$f'(x)$	+	$\nexists$	+

Asíntotas:

Vertical $x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = \begin{cases} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

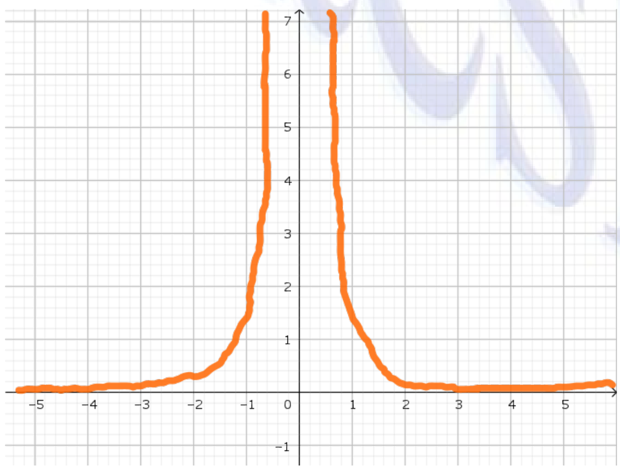
Horizontal $y = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\infty} = 0^+$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\infty} = 0^+$

Monotonía: $f'(x) = -\frac{4x^3}{x^8} = -\frac{4}{x^5}$, $-\frac{4}{x^5} = 0 \quad S.S.$

$\mathbb{R}$		0	
$f'(x)$	+	$\nexists$	-
$f(x)$		$\nexists$	

Curvatura: $f''(x) = \frac{4 \cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{20}{x^6}$, $\frac{20}{x^6} = 0 \quad S.S.$

$\mathbb{R}$		0	
$f'(x)$	+	$\nexists$	+
$f(x)$		$\nexists$	



b)

La función es par o simétrica y por tanto $f(x)=f(-x)$. $f(2)=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}=f(-2)=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$

c)

$$f'(x)=-\frac{4x^3}{x^8}=-\frac{4}{x^5} \quad , \quad -\frac{4}{x^5}=0 \quad S.S.$$

d)

No, ya que el teorema de Rolle exige la continuidad de la función y $f(x)$ no es continua en el intervalo $[-2,2]$, ya que ni siquiera está definida en 0.

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{-x}{4 - x^2}$$

(a) Calcula una primitiva de $f(x)$. (5 puntos)
(b) Calcula el área delimitada por la gráfica de $f(x)$, las rectas $x = \sqrt{5}$ y $x = \sqrt{6}$, y el eje X. (5 puntos)

a)

$$F(x) = \int \frac{-x}{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left|4 - x^2\right| + C$$

b)

$$A = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{6}} \frac{-x}{4 - x^2} dx = F(\sqrt{6}) - F(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \ln |4 - 6| - \frac{1}{2} \ln |4 - 5| = \frac{\ln 2}{2} \ u^2$$

5. Considera los puntos,A = (5, a, 7), B = (3, -1, 7), C = (6, 5, 4).
(a) Determina el valor del parámetro a para el que los puntos A, B y C forman un triángulo rectángulo, con el ángulo recto al punto B. (3 puntos)
(b) Para el valor de a = -2, calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. (3 puntos)
(c) Para el valor de a = 5, calcula el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 puntos)

a)
Si A, B y C forma un triángulo rectángulo con ángulo recto en B,entonces $\overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ \perp \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\overrightarrow{BA}=(2,a+1,0)\ ,\ \overrightarrow{BC}=(3,6,-3)\quad ,\quad \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=6+6a+6=0\quad\Rightarrow\quad a=-2$$

b)
Siendo un triángulo rectángulo, el área podría calcularse de dos maneras distintas:

i. $$A_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{9+36+9}}{2}=\frac{\sqrt{270}}{2}\ u^2$$

ii. $$A_T=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right|}{2}=\frac{\left\|\begin{matrix}\widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 6 & -3\end{matrix}\right\|}{2}=\frac{\left|3\widehat{i}+6\widehat{j}-15\widehat{k}\right|}{2}=\frac{\sqrt{3^3+6^2+(-15)^2}}{2}=\frac{\sqrt{270}}{2}\ u^2$$

c)
Si a = 5, $\overrightarrow{BA}=(2,6,0)$ y por tanto $\overrightarrow{AB}=(-2,-6,0)$. Por otro lado $\overrightarrow{AC}=(1,0,-3)$. Calculamos el ángulo a partir del producto escalar.

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2\cdot 1+(-6)\cdot 0+0\cdot(-3)=-2\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\theta=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}\cos\theta=\sqrt{40}\sqrt{10}\cos\theta\end{matrix}\right\}\quad\Rightarrow\quad -2=\sqrt{400}\cos\theta$$

$$\theta=\arccos\left(-\frac{2}{20}\right)=95.74^\circ$$

6. Dadas las rectas

$$r:\frac{x-m}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1}\quad,\quad s:\begin{cases}x=1\\ y=6+4\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}$$

(a) Calcula el valor de m para que se corten en un punto, (7 puntos)
(b) Calcula el punto de corte. (3 puntos)

a)
Si las rectas son secantes entonces el sistema de ecuaciones que se obtiene con las dos rectas debe ser compatible determinado. Por tanto el rango de la matriz formada por los vectores directores de las rectas más un vector obtenido por diferencia de dos puntos, uno de cada recta, debe ser 2 y por tanto su determinante debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{d_r}=(-1,4,1)\quad,\quad P\in r(m,-10,-3)\\ \overrightarrow{d_s}=(0,4,2)\quad,\quad Q\in s(1,6,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \overrightarrow{QP}=(m-1,-16,-2)\quad\Rightarrow\begin{vmatrix}-1&4&1\\0&4&2\\m-1&-16&-2\end{vmatrix}=0$$

$$8+8(m-1)-4(m-1)-32=0\quad,\quad 4m-28=0\quad,\quad m=7$$

b)
Pasando la recta r a ecuaciones paramétricas $r:\frac{x-7}{-1}=\frac{y+10}{4}=\frac{z+3}{1}=\mu\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=7-\mu\\ y=-10+4\mu\\ z=-3+\mu\end{cases}$ e igualando ambas ecuaciones $\begin{cases}1=7-\mu\\ 6+4\lambda=-10+4\mu\\ -1+2\lambda=-3+\mu\end{cases}\quad \mu=6\ ,\ \lambda=2$ y sustituyendo cualquiera de los dos parámetros en una delas ecuaciones paramétricas se obtiene el punto de corte (1,14,3)

7. Se dispone de dos urnas: U1 y U2.

En U1 hay: 4 bolas rojas y 5 bolas negras.

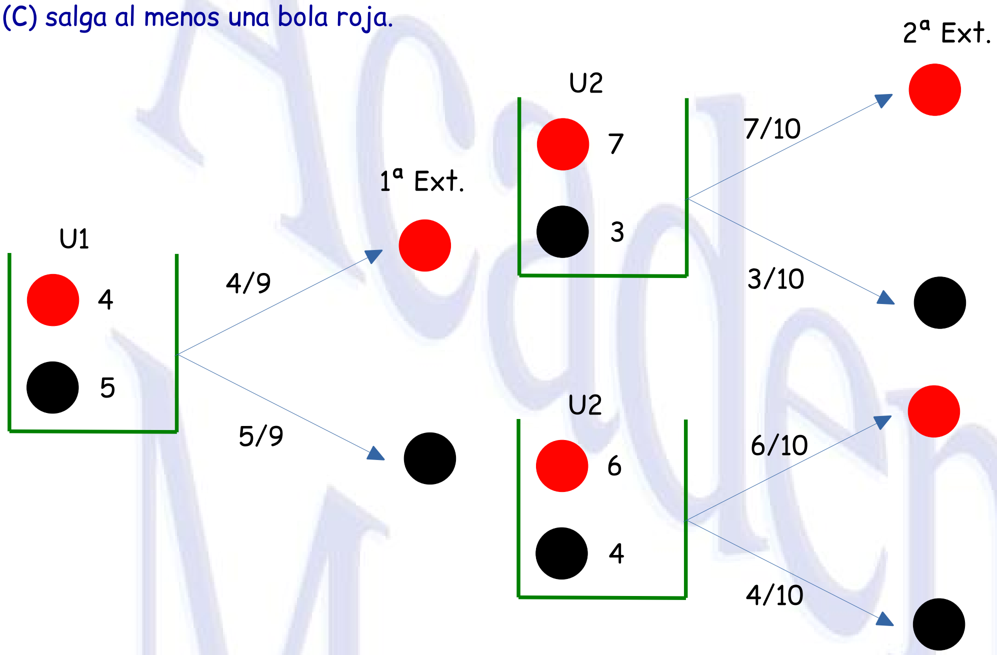
En U2 hay: 6 bolas rojas y 3 bolas negras.

Al azar se saca una bola de U1 y se introduce a U2, después se extrae al azar una bola de U2. Calcula la probabilidad de que:

(a) salga una bola roja de U2 (3 puntos)

(b) la bola extraída de U1 sea negra, sabiendo que la bola que ha salido de U2 también ha sido negra. (3 puntos)

(C) salga al menos una bola roja. (4 puntos)



a)

$$P(2Ext\ R) = P(1Ext\ R \cap\ 2Ext\ R) + P(1Ext\ N \cap\ 2Ext\ R) =$$

$$= P(1Ext\ R) \cdot P(2Ext\ R/1Ext\ R) + P(1Ext\ N) \cdot P(2Ext\ R/1Ext\ N) = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{10} + \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{28}{90} + \frac{30}{90} = \frac{58}{90} = \frac{29}{45}$$

b)

$$P(1Ext\ N/2Ext\ N) = \frac{P(1Ext\ N\ \cap\ 2Ext\ N)}{P(2Ext\ N)} = \frac{P(1Ext\ N) \cdot P(2Ext\ N/1Ext\ N)}{1 - P(2Ext\ R)} = \frac{\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10}}{1 - \frac{29}{45}} = \frac{\frac{20}{90}}{\frac{16}{45}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{16}{45}} = \frac{5}{8}$$

c)

$$P(1\ R) = 1 - P(1Ext\ N\ \cap\ 2Ext\ N) = 1 - P(1Ext\ N) \cdot P(2Ext\ N/1Ext\ N) = 1 - \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{10} = \frac{7}{9}$$

8. Una compañía aérea ha observado que los pesos de las maletas de un determinado trayecto siguen una distribución normal de media 7,5 kg y desviación tıpica de 0,4 kg. calcula la probabilidad de que, elegida una maleta al azar:
(a) pese menos de 7,2 kg pero más de 7 kg. (4 puntos)
(b) pese entre 7,8 kg y 8 kg. (3 puntos)
(c) Si en un trayecto hay 90 maletas, cuántas maletas es de esperar que pesen menos 8,1 kg? (3 puntos)

a)
$N(7,5;0,4)$, $P(7<X<7,2)$ tipificamos y buscamos en la tabla $N(0;1)$

$$P(7<X<7,2)=P\left(\frac{7-7,5}{0,4}<Z<\frac{7,2-7,5}{0,4}\right)=P(-1.25<Z<-0.75)=P(0.75\leq Z\leq 1.25)=$$

$$=P(Z\leq 1.25)-P(Z\leq 0.75)=0.8944-0.7734=0.1210$$

b)
Tipificamos y buscamos en la tabla $N(0;1)$

$$P(7,8<X<8)=P\left(\frac{7,8-7,5}{0,4}<Z<\frac{8-7,5}{0,4}\right)=P(0.75\leq Z\leq 1.25)=P(Z\leq 1.25)-P(Z\leq 0.75)=0.1210$$

c)
Calculamos la probabilidad de que una maleta pese menos de 8,1 kg.

$$P(X<8,1)=P\left(Z<\frac{8,1-7,5}{0,4}\right)=P(Z\leq 1.50)=0.9332$$

y por tanto esperamos que haya $0.9332\cdot 90=83.988\approx 84$ maletas.