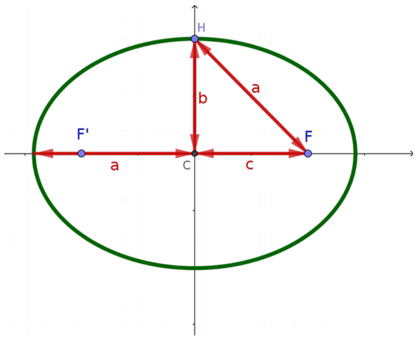
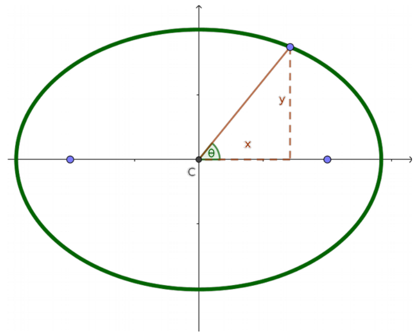
La ecuación de una elipse vienen dada por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$$

o en coordenadas polares

$$\left\{\begin{array}{l} x=a\cdot\cos\theta \\ y=b\cdot\sin\theta \end{array}\right. \quad (2)$$



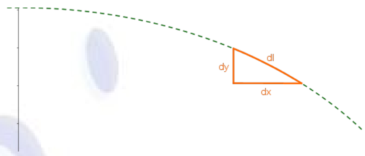


siendo a y b los semiejes mayor y menor respectivamente, c la semidistancia focal y la excentricidad de la elipse definida como $e=\frac{c}{a}$.

El perímetro de la elipse lo calculamos a partir de la integral

$$P=\int dl \quad (3)$$

El diferencial de longitud de arco para una curva dada en coordenadas polares es



$$dl=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \quad (4)$$

A partir de las ecuaciones polares de la elipse (2) tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx}{d\theta}=-a\cdot\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta}=b\cdot\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow dl=\sqrt{a^2\cdot\sin^2\theta+b^2\cdot\cos^2\theta}\ d\theta=\sqrt{a^2\cdot(1-\cos^2\theta)+b^2\cdot\cos^2\theta}\ d\theta=$$

$$=\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cdot\cos^2\theta}\ d\theta=\sqrt{a^2+c^2\cdot\cos^2\theta}\ d\theta=a\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos^2\theta}\ d\theta=a\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\ d\theta \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3) y aprovechando la simetría del problema tenemos

$$P=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\ d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\ d\theta \quad (6)$$

Dado que $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ y haciendo el cambio de variable $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$, la integral (6) queda

$$P=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\ d\theta=4a\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\ (-d\phi)=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\phi}\ d\phi=4a\cdot E(e^2) \quad (7)$$

Esta integral (7) se denomina integral elíptica completa de segunda especie y no puede calcularse utilizando funciones elementales.

Por el teorema del binomio sabemos que

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+\cdots+x^k$$

$$si\ \ |x|<1\Rightarrow(1-x)^k=1-kx+\frac{k(k-1)}{2!}x^2-\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3+....$$

$$si\ k=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{1-x}=1-\frac{1}{2}x-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2}x^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2\cdot 3}x^3-...=$$

$$=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^3}x^2-\frac{1\cdot 3}{2^4\cdot 3}x^3-...=1-\frac{x}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n \quad (8)$$

en nuestro caso $x=e\sin\phi=e\cos\theta$ y dado que $e<1; |\sin\phi|\,;|\cos\theta|<=1 \ \Rightarrow \ \begin{matrix}|e\sin\phi|<1\\|e\cos\theta|<1\end{matrix}$. Por tanto

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\ \theta}=1-\frac{e^2\cos^2\ \theta}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\cos^{2n}\ \theta$$

$$\sqrt{1-e^2\sin^2\ \phi}=1-\frac{e^2\sin^2\ \phi}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\sin^{2n}\ \phi$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en las integrales 6 y 7, para el perímetro de la elipse, quedan

$$P=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\cos^2\ \theta}\ d\theta=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{e^2\cos^2\ \theta}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\cos^{2n}\ \theta\right]\ d\theta=$$

$$=4a\left[\theta\ |_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{e^2}{2}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\cos^{2n}\ \theta\ d\theta\right]=$$

$$=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2}\frac{\pi}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\ \theta\ d\theta\right] (9)$$

$$P=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\ \phi}\ d\phi=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\frac{e^2 sin^2\ \phi}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\sin^{2n}\ \phi\right]\ d\phi=$$

$$=4a\left[\phi\ |_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{e^2}{2}\left(\frac{\phi}{2}-\frac{\sin 2\phi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\sin^{2n}\ \phi\ d\phi\right]=$$

$$=4a\left[\frac{\pi}{2}-\frac{e^2}{2}\frac{\pi}{4}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\ \phi\ d\phi\right] (10)$$

Sea $I_p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\theta\ d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-1}\theta\cdot\cos\theta\ d\theta$. Empleando el método por partes para integrar la función anterior

$$\left.\begin{matrix}u=\cos^{p-1}\theta\ \Rightarrow\ du=-(p-1)\cos^{p-2}\theta\cdot\sin\theta\ d\theta\\ dv=\cos\ d\theta\ \Rightarrow\ v=\sin\theta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ I_p=\sin\theta\cdot\cos^{p-1}\theta|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(p-1)\cos^{p-2}\theta\cdot\sin^2\theta\ d\theta=$$

$$=(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-2}\theta(1-\cos^2\theta)\ d\theta=(p-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{p-2}\theta\ d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p\theta\ d\theta\right]=(p-1)\left[I_{p-2}-I_p\right]$$

$$I_p=(p-1)\cdot I_{p-2}-(p-1)\cdot I_p\ \Rightarrow\ p\cdot I_p=(p-1)\cdot I_{p-2}\ \Rightarrow\ I_p=\frac{p-1}{p}\cdot I_{p-2}=\frac{p-1}{p}\cdot\frac{p-3}{p-2}\cdot I_{p-4}=\cdots=$$

$$=\begin{cases}\frac{(p-1)(p-3)(p-5)...3\cdot 1}{p(p-2)(p-4)...4\cdot 2}\cdot I_0\ si\ p\ par\\ \frac{(p-1)(p-3)(p-5)...4\cdot 2}{p(p-2)(p-4)...3\cdot 1}\cdot I_1\ si\ p\ impar\end{cases}\quad \text{y como}\quad \begin{matrix}I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{2}\\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta=1\end{matrix}\quad\Rightarrow I_p=\begin{cases}\frac{(p-1)(p-3)(p-5)...1}{p(p-2)(p-4)...2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(p-1)!!}{p!!}\cdot\frac{\pi}{2}\ si\ p\ par\\ \frac{(p-1)(p-3)(p-5)...2}{p(p-2)(p-4)...1}=\frac{(p-1)!!}{p!!}\ si\ p\ impar\end{cases}$$

y en nuestro caso como p = 2n es par resulta

$$P = 4a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}\frac{\pi}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\ \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right] \quad (11)$$

Como

$$\frac{(2n-1)!!}{2n!!} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots2} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots1}{2n\cdot2(n-1)\cdot2(n-2)\dots2} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots1}{2^n\cdot n!} =$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\dots1}{2n(2n-2)(2n-4)\dots2\cdot2^n\cdot n!} = \frac{2n!}{(2^n\cdot n!)^2} \quad (12)$$

(11) queda

$$P = 4a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}\frac{\pi}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\ \frac{2n!}{(2^n\cdot n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\right] =$$

$$= 2\pi a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\ \frac{2n!}{(2^n\cdot n!)^2}\right] \quad (13)$$

Sea $I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\phi\ d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\phi\cdot\sin\phi\ d\phi$. Empleando el método por partes para integrar la función anterior

$$\left.\begin{array}{l} u = \sin^{p-1}\phi \ \Rightarrow\ du = (p-1)\sin^{p-2}\phi\cdot\cos\phi\ d\theta \\ dv = \sin\phi\ d\phi \ \Rightarrow\ v = -\cos\phi \end{array}\right\} \Rightarrow\ I_p = -\cos\phi\cdot\sin^{p-1}\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}(p-1)\sin^{p-2}\phi\cdot\cos^2\phi\ d\phi =$$

$$= (p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\phi\cdot(1-\sin^2\phi)\ d\phi = (p-1)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-2}\phi\ d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\phi\ d\phi\right] = (p-1)\left[I_{p-2} - I_p\right]$$

$$I_p = (p-1)\cdot I_{p-2} - (p-1)\cdot I_p \ \Rightarrow\ p\cdot I_p = (p-1)\cdot I_p \ \Rightarrow\ I_p = \frac{p-1}{p}\cdot I_{p-2} = \frac{p-1}{p}\cdot\frac{p-3}{p-2}\cdot I_{p-4} = \cdots =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{(p-1)(p-3)(p-5)\dots3\cdot1}{p(p-2)(p-4)\dots4\cdot2}\cdot I_0\ si\ p\ par \\ \frac{(p-1)(p-3)(p-5)\dots4\cdot2}{p(p-2)(p-4)\dots3\cdot1}\cdot I_1\ si\ p\ impar \end{array}\right. \text{ y como } \begin{array}{l} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi = \frac{\pi}{2} \\ I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi = 1 \end{array} \Rightarrow I_p = \left\{\begin{array}{l} \frac{(p-1)(p-3)(p-5)\dots1}{p(p-2)(p-4)\dots2}\cdot\frac{\pi}{2}\ si\ p\ par \\ \frac{(p-1)(p-3)(p-5)\dots2}{p(p-2)(p-4)\dots1}\ si\ p\ impar \end{array}\right.$$

y en nuestro caso como p= 2n es par resulta

$$P = 4a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}\frac{\pi}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\ \frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{2}\right] =$$
$$= 2\pi a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\ \frac{2n!}{(2^n\cdot n!)^2}\right] \quad (14)$$

resultando la misma expresión que la obtenida en 12. Estas expresiones se conocen como desarrollo en serie de Maclaurin. La suma de los infinitos términos de la serie de potencias (13) y (14) nos devolvería el valor exacto del perímetro del elipse.

Podemos obtener otra expresión para el perímetro de la elipse a partir de la función hipergeométrica. La función hipergeométrica es una solución de la ecuación diferencial

$$x(1-x)y''(x) + \left[c - (a+b+1)x\right]y'(x) - aby(x) = 0$$

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!} = {}_2F_1(a,b,c;x)$$

donde $(a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1) = \dfrac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$.

En nuestro caso

$$E(e^2) = \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; e^2\right) \quad \Rightarrow \quad P = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}\, d\phi = 4a \cdot E(e^2) =$$

$$= 4a \cdot \frac{\pi}{2} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; e^2\right) = 2\pi a \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; e^2\right) \quad (15)$$

cuya expresión es la que obtenemos en (13) y (14).

La siguiente propiedad de la función hipergeométrica

$$F\left(\alpha, \beta; 2\beta; \frac{z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \beta + \frac{1}{2}; \beta + \frac{1}{2}; z^2\right)$$

con $\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\beta = -\dfrac{1}{2}$ y $e^2 = \dfrac{4z}{(1+z)^2} \Rightarrow \dfrac{a^2 - b^2}{a^2} = \dfrac{4z}{(1+z)^2} \Rightarrow z = \dfrac{a-b}{a+b}$ nos permite reescribir el perímetro de la elipse

$$P = 2\pi a \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; e^2\right) = 2\pi a \cdot \frac{a+b}{2a} \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right) = \pi(a+b) \cdot {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1; \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right) =$$

$$= \pi(a+b) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(-\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n n!} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n} = \pi(a+b) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(-\frac{1}{2}\right)_n}{n!^2} \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n} =$$

$$= \pi(a+b) \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6 + \dots\right) \quad (16)$$

La expresión obtenida se conoce como de Gauss-Kummer.

Las expresiones 13 (function macl(a,b)) y 16 (function gausskum(a,b)) pueden incorporarse fácilmente como funciones definidas en una hoja de cálculo como LibreOffice Calc a través del LibreOffice Basic, con el siguiente código.

```
function macl(a,b)

e2=1-(b/a)^2
El=1
n=1
d=2
r=(n/d)^2*e2
do
El=El-r
r1=r
n=n+2
d=d+2
r=r1*(n/d)^2*e2*(n-2)/n
loop while r1<>r
macl=2*PI()*a*El
End function
```

```
function gausskum(a,b)
h=(a-b)/(a+b)
t=0.5*h
p=1+t*t
u=1
do
t=t*u/(u+3)*h
p1=p
p=p+t*t
u=u+2
loop while p1<>p
gausskum=PI()*(a+b)*p
End function
```

Se van sumando términos de la serie hasta alcanzar la precisión máxima. El límite viene impuesto por el sistema de coma flotante de doble precisión, 15 cifras decimales si la parte entera es cero y 14 en caso contrario.

Es interesante ver el número de términos sumados hasta alcanzar la precisión máxima, lo cual dependerá de lso valores de a y b. La siguiente tabla resume los resultados.

a	b	Gauss-Kummer		Maclaurin	
		Perímetro	Términos sumados	Perímetro	Términos sumados
1	0.99	6.25180884795037	3	6.25180884795037	7
1	0.90	5.97316043252483	6	5.97316043252483	16
1	0.60	5.10539977267963	10	5.10539977267963	60
1	0.10	4.06397418010090	56	4.06397418010092	2025
1	0.01	4.00109832972265	405	4.00109832972471	121723