OPCIÓ A

1. a) Discute para que valores de m el sistema siguiente es compatible: (7 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} 4x+my+z=m+2 \\ x+y+mz=-2(m+1) \\ 4x+y+z=m \end{array}\right\}$$

b) Resolverlo en el caso en que m = 0. (3 puntos)

a.

Empezamos calculando el determinante de la matriz de los coeficientes A y determinamos para que valores de m se anula.

$$A=\begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=4+1+4m^2-4-4m-m=4m^2-5m+1 \quad\Rightarrow\quad -4m^2-5m+1=0 \quad\Rightarrow\quad m=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}=\begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

+ Si $m \neq 1, -\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad Ran(A)=3=Ran(A^*) \quad\Rightarrow\quad S.C.D.$

+ Si m = 1 $\quad\Rightarrow\quad A^*=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Ran(A)=2,\; \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Ran(A^*)=3 \;\Rightarrow\; S.I.$

+Si m = $-\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad A^*=\begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{9}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{2} \\ 4 & 1 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Ran(A)=2,\; \begin{vmatrix} 4 & \frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 4 & 1 & \frac{1}{4} \end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Ran(A^*)=3 \;\Rightarrow\; S.I.$

b.

Si m = 0 $\quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ resolviendo por Cramer y con $|A|=1$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=0 \;,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=-2 \;,\qquad x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}=2$$

Solución: $\boxed{(x,y,z)=(0,-2,2)}$

2. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. Haz un dibujo aproximado de la función anterior en el intervalo [–1, 1]. (5 puntos). Calcula el área limitada por la gráfica de la función anterior, el eje de las X y las rectas verticales x = – ½ y x = ½ . (5 puntos)

i. Dominio. Empezamos con el dominio de definición de la función. Al ser una función racional su dominio serán todos los reales excepto los valores que anulan el denominador.

$$\mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$$

ii. Cortes con los ejes

+ con x $\Rightarrow$ $f(x)=0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=0$ $\Rightarrow$ $x^2+1=0$ S.S. $\Rightarrow$ sin cortes con el eje x.

+ con y $\Rightarrow$ $x=0$ $\Rightarrow$ $f(0)=\dfrac{1}{-1}=-1$ $\Rightarrow$ (0,-1).

iii. Signo

$\mathbb{R}$		-1		1	
f(x)	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+

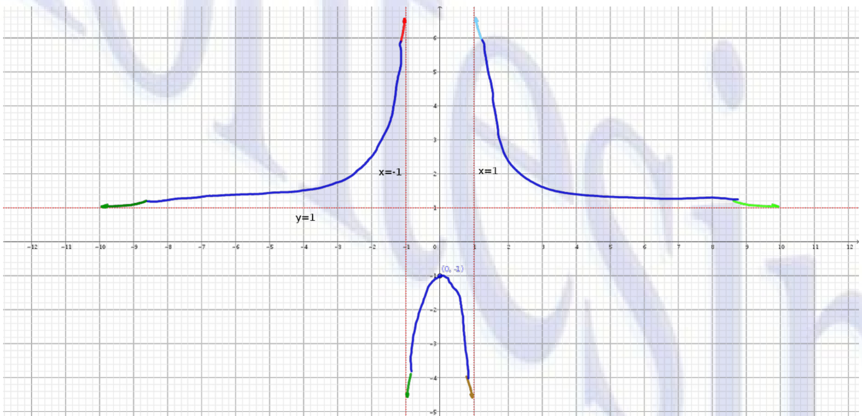
iv. Asíntotas

+ verticales. Buscamos en los valores que no pertenecen al domino de defición.

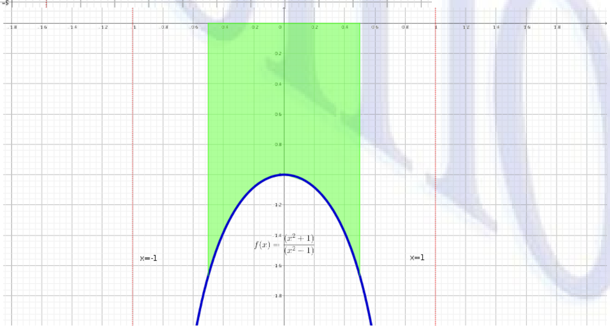
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\end{cases}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{2}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\dfrac{2}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

+horizontal/oblicua.Como los grados del numerador y denominador son iguales tenemos una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{2}{0}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2}{x^2}=1^+\qquad \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{2}{0}=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x^2}=1^+$$



$$\text{Área}=-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=-\left(F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=F\left(-\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)$$



$$F(x)=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=\int 1+\frac{2}{x^2-1}\cdot dx=\int 1+\frac{2}{(x+1)(x-1)}\cdot dx\overset{(1)}{=}\int 1+\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}\cdot dx=x+\ln|x-1|-\ln|x+1|=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

(1) $\frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)} \Rightarrow 2=A\cdot(x+1)+B\cdot(x-1) \Rightarrow \begin{matrix} x=1 & 2=2\cdot A & A=1 \\ x=-1 & 2=-2\cdot B & B=-1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{2}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}$

$$\text{Área}=F\left(-\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right|-\left(\frac{1}{2}+\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right|\right)=-\frac{1}{2}+\ln 3-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}=-1+\ln\frac{3}{\frac{1}{3}}=-1+\ln 9=1.197\,u^2$$

Solución: $\boxed{\text{Área}=1.197\,u^2}$

3. Determina los puntos A, B y C de la recta $x-12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3}$ que están en los planos coordenados (6 puntos) y determina cuál de estos tres puntis, A, B, C, está situado entre los otros dos. (4 puntos)

Corte con el plano x=0 $\quad -12=\frac{y+6}{2}=\frac{z-6}{3} \quad \Rightarrow \quad y=-30,\ z=-30 \quad \Rightarrow \quad A\,(0,-30,-30)$

Corte con el plano y=0 $\quad x-12=\frac{6}{2}=\frac{z-6}{3} \quad \Rightarrow \quad x=15,\ z=15 \quad \Rightarrow \quad B\,(15,0,15)$

Corte con el plano z=0 $\quad x-12=\frac{y+6}{2}=-\frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad x=10,\ y=-10 \quad \Rightarrow \quad C\,(10,-10,0)$

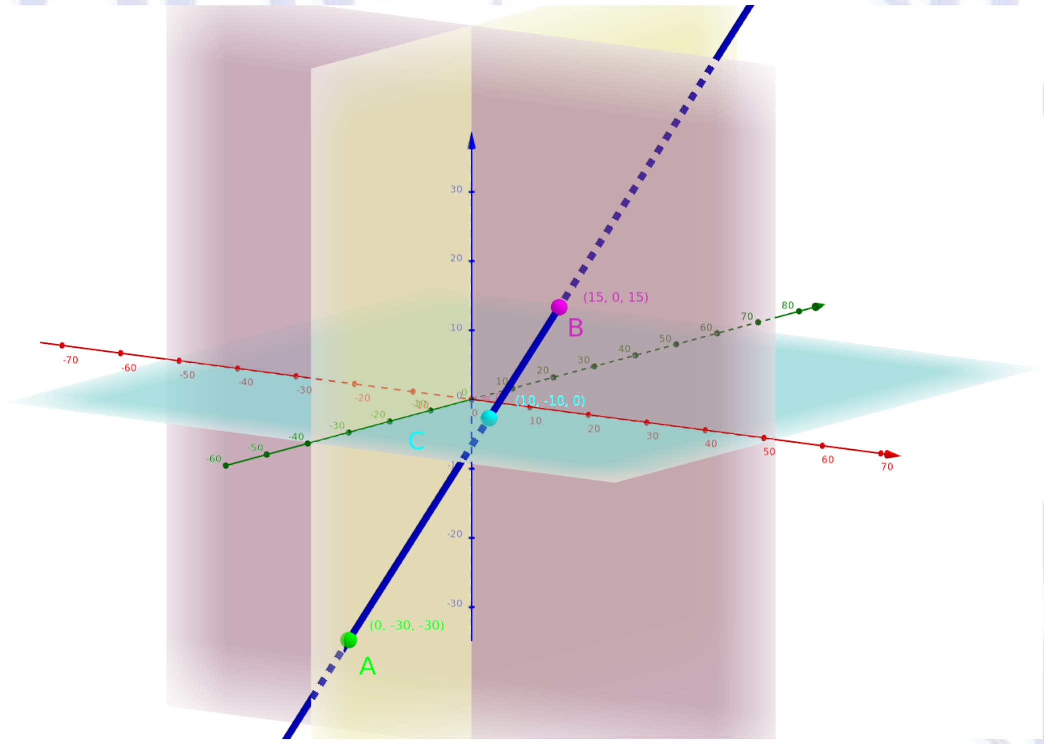
Solución: $\boxed{(0,-30,30) \quad (15,0,15) \quad (10,-10,0)}$

Para determinar que punto queda entre los otros dos, escribo la ecuación paramétrica de la recta con uno cualquiera de los puntos A, B o C. Calculo el parámetro par allegar a los otros dos puntos. Si los parámetros tienen diferente signo el punto elegido será el que queda entre ellos. Si los parámetros tienen el mismo signo, el que tenga menor parámetro en valor absoluto quedará entre los otros dos.

Escribo la ecuación paramétrica usando el punto A

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=-30+2\cdot\lambda \\ z=-30+3\cdot\lambda \end{cases} \Rightarrow \quad B \begin{cases} 15=\lambda \\ 0=-30+2\cdot\lambda \\ 15=-30+3\cdot\lambda \end{cases} \quad \lambda_B=15 \quad \Rightarrow \quad C \begin{cases} 10=\lambda \\ -10=-30+2\cdot\lambda \\ 0=-30+3\cdot\lambda \end{cases} \quad \lambda_C=10$$

Por lo tanto el punto C queda entre A y B.



4. Queremos hacer un estudio de las opiniones políticas de los estudiantes de primer curso de la UIB. Para ello, hemos tomado una muestra representativa de 500 estudiantes de primer curs y les hemos preguntado a que partido político votaron en las últimas elecciones. De los 500 estudiantes, 200 respondieron que votaron al PP, 100 al PSIB y el resto otras formaciones políticas. Sabiendo que 200 de los estudiantes eren chicos, que el 40% de los votantes del PP son chicas y que el 50% de los votantes del PSIB son chicos, se pide:

a) La probabilidad que un estudiante haya votado a otras formaciones políticas y sea chica. (4 puntos)
b) La probabilidad que un estudiante chico haya votado al PP. (2 puntos)
c) La probabilidad que un estudiante que ha votado a otras formaciones políticas sea chica. (4 puntos)

El problema puede resolverse con una tabla de contingencia o diagrama de árbol.

El 40 % de los votantes del PP son chicas ⇒ $200 \cdot 0.40 = 80$ [i]. El resto de votantes del PP serán chicos[ii].
El 50 % de los votantes del PSIB son chicos ⇒ $100 \cdot 0.50 = 50$ [iii]. El resto de votantes del PSIB serán chicas[iv].

	PP	PSIB	Otros	Total
M	80[i]	50[iv]	170	300
H	120[ii]	50[iii]	30	200
Total	200	100	200	500

a. $\boxed{P(M \cap Ot) = \frac{170}{500} = \frac{17}{50}}$

b. $\boxed{P(PP/H) = \frac{120}{300} = \frac{2}{5}}$

c. $\boxed{P(M/Ot) = \frac{170}{200} = \frac{17}{20}}$