EXAMEN DE ANÁLISIS MATEMÁTICO
Ingeniería Técnica Industrial. Septiembre de 2003

Q2. Dada la función $y=1-\sqrt{(x-1)^2}$, ¿cumple el teorema de Rolle en el intervalo [0,2] ?

El teorema de Rolle dice que dada una función:

i- Continua en el intervalo [a,b].
ii- f(a) = f(b).
iii- Derivable en (a,b).

Entonces existe un c $\in$ (a,b) tal que f'(c)=0.

En nuestro caso se cumplen las condiciones i y ii, pero no la iii. La función es continua en toda la recta real, y por lo tanto es continua en [0,2].

Al ver la función uno se siente tentado a hacer la siguiente operación

$$y=1-\sqrt{(x-1)^2}=1-(x-1)=-x$$

lo cual es falso. Pongamos un ejemplo numérico, es decir veamos que no se cumple para un valor concreto de x y por tanto se pierde toda generalidad y la igualdad deja de ser verdadera. Para la función original tenemos:

$$x=-3 \rightarrow 1-\sqrt{(-3-1)^2}=1-\sqrt{(-4)^2}=1-\sqrt{4^2}=1-4=-3$$

Para la función "operada" tenemos

$$x=-3 \rightarrow -(-3)=3$$

resultados distintos que demuestran que la operación efectuada no es correcta. Otra manera de escribir la función anterior es:

$$f(x)=1-|x-1|=\begin{cases} x & \text{si } x\le 1 \\ 2-x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Si representamos la función vemos que la función presenta un punto anguloso en x = 1, punto en el que no existe la derivada.