Opción A

1. a) Tres ciclistas, C_1 , C_2 i C_3 , salen a entrenarse. Por cada quilómetro que recorre C_1 , C_2 recorre 2 quilómetros y C3 recorre las tres cuartas partes de lo que recorre C_2. Al final, la suma de las distancias recorridas por los tres ciclistas es de 180 quilómetros. ¿Cuántos quilómetros recorre cada uno? (6 puntos)

b) Determina las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}$ tales que $A+A^T=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde A^T es la matriz traspuesta de A. (4 puntos)

a)

Sea x los kilómetros recorridos por C_1, y los kilómetros recorridos por C_2 y z los recorridos por C_3. Traducimos el enunciado a ecuaciones:

i. La suma de las distancias recorridas por los tres ciclistas en 180 km $\Rightarrow$ $x+y+z=180$.

ii. Por cada kilómetro que recorre C_1, C_2 recorre 2 kilómetros $\Rightarrow$ es decir C_2 recorre el doble que C_1 $\Rightarrow$ $y=2x$.

iii. C_3 recorre tres cuartas partes de lo que recorre C_2 $\Rightarrow$ $z=\frac{3}{4}y$.

Podemos escribir el sistema y resolverlo, por ejemplo por el método de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ y=2x \\ z=\frac{3}{4}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ -2x+y=0 \\ -\frac{3}{4}y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ -2x+y=0 \\ -3y+4z=0 \end{cases} F_2+2F_1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ 3y+2z=360 \\ -3y+4z=0 \end{cases} F_3+F_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=180 \\ 3y+2z=360 \\ 6z=360 \end{cases}$$

$z=60$ km ; $y=80$ km ; $x=40$ km

b)

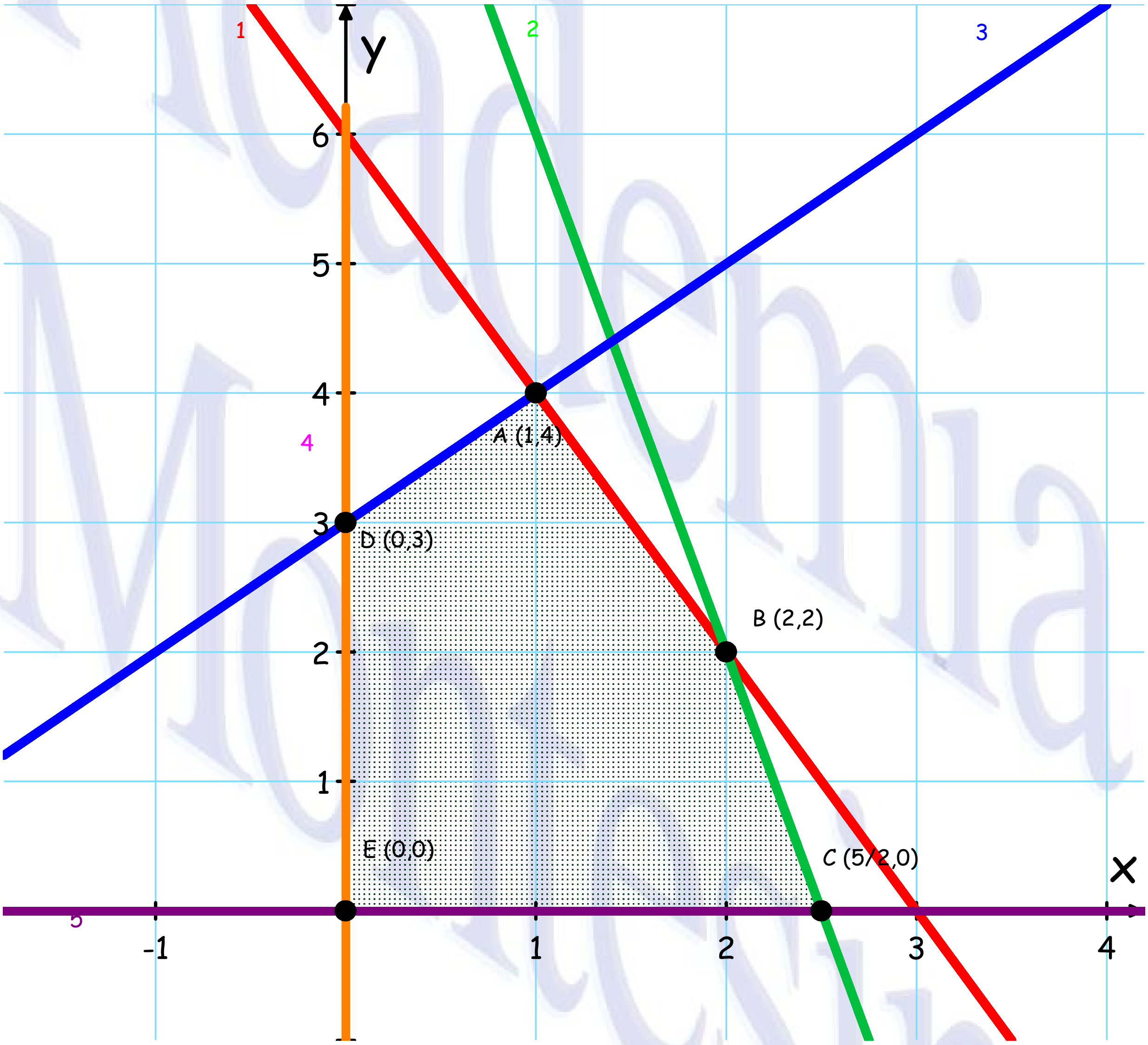
La matriz traspuesta se obtiene el invertir filas por columnas

$$\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & a+b \\ a+b & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -a \\ a & 4 \end{pmatrix} \quad \forall\, a\in\mathbb{R}$$

2. a) Representa gráficamente el conjunto de puntos que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:

$$2x+y\le 6, \qquad (1)$$
$$4x+y\le 10, \qquad (2)$$
$$-x+y\le 3, \qquad (3)$$
$$x\ge 0, \qquad (4)$$
$$y\ge 0, \qquad (5)$$

Indica si es o no una región acotada del plano. Señala sobre la gráfica los vértices con las coordenadas, así como la ecuación que corresponde a cada una de las rectas que la delimitan. (6 puntos)
b) Calcula el máximo de la función f (x, y) = 4x + 2y – 3, en el recinto anterior e indica donde se alcanza. (4 puntos)



El recinto solución incluye los tramos de rectas que forman parte de los lados del polígono. Efectivamente la solución es una región cerrada.

b)

Punto	f(x,y) = 4 x + 2 y -3
A (1,4)	9
B (2,2)	9
C (5/2,0)	7
D (0,3)	3
E (0,0)	0

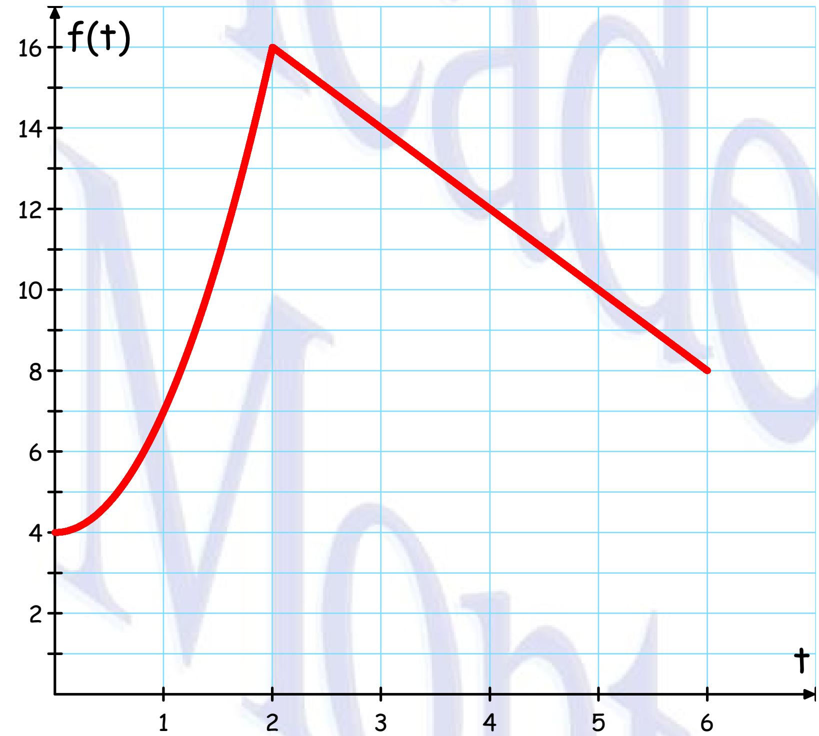
En todos los puntos de la recta 1 entre A y B la función f alcanzará un máximo

3. El precio de un artículo, que ha estado los últimos 6 años en el mercado, en función del tiempo t (en años) ha seguido la siguiente función

$$f(t)=\begin{cases}3t^2+4 & \text{si } 0\le t\le 2\\ -2t+20 & \text{si } 2<t\le 6\end{cases}$$

a) Representa la función precio en los últimos 6 años. ¿Es continua esta función? ¿Es derivable? (4 puntos)
b) Estudia cuando ha sido creciente y cuando decreciente el precio del artículo. (2 puntos)
c) ¿Cual ha sido el precio máximo que ha alcanzado el artículo? ¿Cual es el precio actual? (2 puntos)
d) Representa la función derivada. (2 puntos)

a)



El primer trozo corresponde a una parábola y el segundo una recta.

La parábola es cóncava y el vértice queda justo en x_v=0 y_v = 4. Completamos dando valores a x por ejemplo 1 y 2, resultando (1,7) y (2,16).

La recta arranca desde el punto abierto (2,16) que quedará cerrado por la parábola. Otros valores son (4,12) y (6,8).

De la gráfica se ve que la función es continua, pero no derivable ya que en (2,16) hay un punto anguloso.

Probemos la continuidad. Ambas son funciones polinómicas por tanto continuas en todo el intervalo donde están definidas. Sólo el punto t= 2 es un punto crítico.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 2^-} f(t)=\lim\limits_{t\to 2^-} 3t^2+4=16\\ \lim\limits_{t\to 2^+} f(t)=\lim\limits_{t\to 2^+} -2t+20=16\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{t\to 2} f(t)=16=f(2)\Rightarrow$$ f(t) continua en t = 2 y por tanto en todo su dominio de definición.

Probemos que no es derivable $f'(t)=\begin{cases}6t & \text{si } 0<t<2\\ -2 & \text{si } 2<t<6\end{cases}$ y dado que $f'(2^-) = 12 \neq f'(2^+) = -2$ la función no es derivable en t = 2.

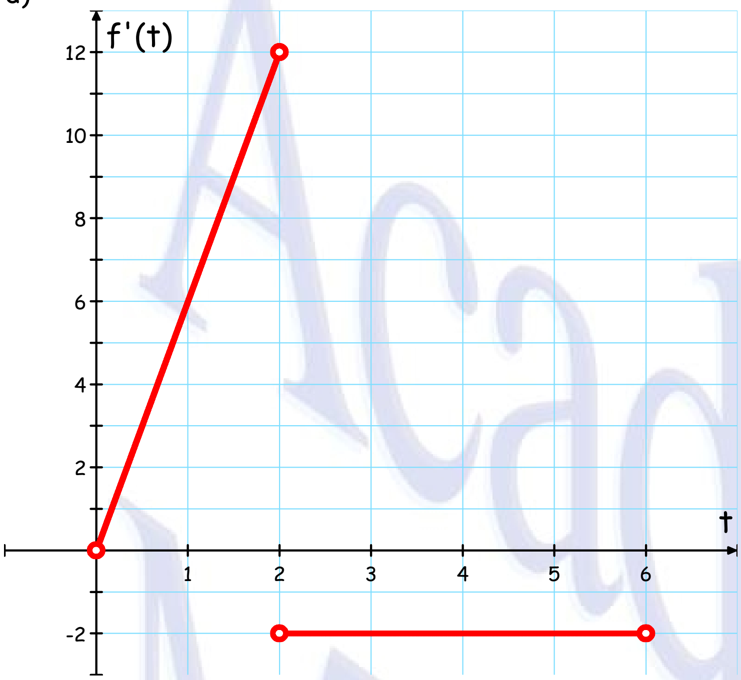
b)

	0		2		6
f'	∄	+	∄	-	∄
f	4	↗	16	↘	8

c)

El máximo se alcanza en t = 2, a un precio de 16 u.m.

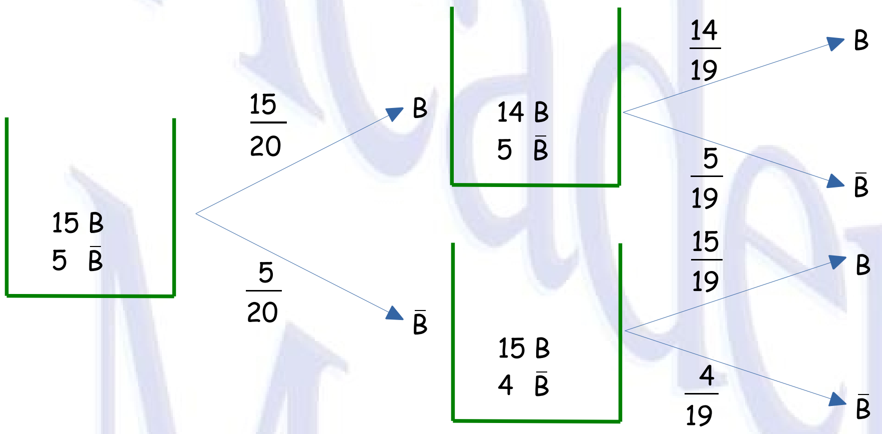
d)



El primer tramo de la función derivada es una recta que va de (0,0) a (2,12) y el segundo es una función constante paralela al eje de las abscisas entre (2,-2) y (6,-2). En ambos los extremos quedan abiertos ya que la función no es derivable en 0; 2 y 6

4. En una caja hay guardados 20 relojes, de los cuales hay 15 que funcionan correctamente.
a) Representa la situación del problema, cuando se extraen dos relojes al azar sin remplazamiento, mediante un diagrama en árbol. (3 puntos)
b) Si se extrae un reloj al azar, cual es la probabilidad de que funcione bien? (1 punto)
c) Si se extraen dos relojes al azar, sin reemplazamiento, cual es la probabilidad de que los dos funcionen bien? (3 puntos)
d) Si se extraen dos relojes al azar sucesivamente, sin reemplazamiento, y el primero no funciona correctamente, cual es la probabilidad de que el segundo tampoco funcione? (3 puntos)

a)



b)

$$P(B)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

c)

$$P(1^{o}B\,y\,2^{o}B)=P(1^{o}B\cap 2^{o}B)=P(1^{o}B)\cdot P(2^{o}B/1^{o}B)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}=\frac{21}{38}$$

d)

$$P(2^{o}\bar{B}/1^{o}\bar{B})=\frac{4}{19}$$