Opción A

1. a) Discute para qué valores de m el sistema siguiente tiene solución: $\left.\begin{array}{l} x+my+z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \\ mx+y-z=-1 \end{array}\right\}$ **(7 puntos)**

b) Resuélvelo, si es posible, cuando m =1. **(3 puntos)**

a) Lo resolveremos aplicando el teorema de Rouché-Frobenius y por tanto empezaremos calculando el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2+3+m^2-2m-1+3m=m^2+m \Rightarrow m^2+m=0 \Rightarrow m(m+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m+1=0 \Rightarrow m=-1 \end{cases}$$

i- **Si m ≠ 0 y -1** $\Rightarrow R(A)=R(A')=3 \Rightarrow$ **S.C.D.**

ii- **Si m = 0** $\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A)=2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A')=3 \end{array} \right\} \Rightarrow R(A)\neq R(A') \Rightarrow$ **S.I.**

iii- **Si m = -1** $\Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{F1=-F3}{\Rightarrow} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow R(A)=2=R(A') \Rightarrow$ **S.C.I.**

b) Si m = 1 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} F_2-3F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -y-2z=-4 \\ -2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mathbf{z=1; y=2; x=-2}$

Clases de matemáticas, física y química
Tel.: 665.516.510

2. La función $f(x)=x^3+ax^2+bx$ tiene un extremo relativo en x = 2 y un punto de inflexión en x = 3. Calcula los valores de a y b (8 puntos), y determina si este extremo es un máximo o un mínimo relativo de f (2 puntos)

Si f(x) tiene un extremo relativo en a $\Rightarrow$ $f'(a)=0$. Si f(x) tiene un punto de inflexión en b $\Rightarrow$ $f''(b)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax+b \;\Rightarrow\; f'(2)=3\cdot 2^2+2a\cdot 2+b=12+4a+b=0 \\ f''(x)=6x+2a \;\Rightarrow\; f''(3)=6\cdot 3+2a=18+2a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+b=-12 \\ 2a=-18 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{a=-9\ ,\ b=24}$$

$$\mathbf{f(x)=x^3-9x^2+24x}$$

Determinamos si se trata de un máximo o mínimo relativo ayudándonos de la segunda derivada que ya tenemos calculada.

$f''(x)=6x-18 \;\Rightarrow\; f''(2)=6\cdot 2-18=12-18=-6<0 \;\Rightarrow$ **máximo relativo**

Clases de matemáticas, física y química
Tel.: 665.516.510

3. Contesta los apartados siguientes:

a) Si la probabilidad de la intersección de dos sucesos independientes es 0,2 y la de su unión es 0,7, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos? (5 puntos)

b) En un experimento se sabe que p(A) = 0,6, p(B) = 0,3 y P(A|B) = 0,1. Calcula P(A U B). (5 puntos)

a) Si A y B son sucesos independientes $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Además $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. Por tanto

$$\left.\begin{array}{lll} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) & \Rightarrow & 0.7=P(A)+P(B)-0.2 \\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) & \Rightarrow & 0.2=P(A)\cdot P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.9=P(A)+P(B) \\ 0.2=P(A)\cdot P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0.9-P(A)=P(B) \\ 0.2=P(A)\cdot P(B) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$0.2=P(A)\cdot(0.9-P(A)) \Rightarrow P(A)^2-0.9\cdot P(A)+0.2=0 \Rightarrow \mathbf{P}(A)=\frac{0.9\pm\sqrt{0.9^2-4\cdot 1\cdot 0.2}}{2}=\left\{\begin{array}{lll} \mathbf{0.4} & \Rightarrow & \mathbf{p(B)=0.5} \\ \mathbf{0.5} & \Rightarrow & \mathbf{p(B)=0.4} \end{array}\right.$$

b) Por el teorema del Bayes sabemos que $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)$, además

$$\mathbf{P(A\cup B)}=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A/B)\cdot P(B)=0.6+0.3-0.1\cdot 0.3=\mathbf{0.87}$$

4. Se supone que la cantidad de agua (en litros) recogida cada día en una estación meteorológica se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica σ = 2. Se toma una muestra aleatoria simple y se obtienen las siguientes cantidades de agua recogidas cada día en litros:

8.8: 3.8; 6.5; 3.6; 5.5; 7.5; 3.5; 8.9; 7.9; 4

a) Determina un intervalo de confianza para cantidad media de agua recogida cada día en la estación, con un nivel de confianza del 95 %. (5 puntos)
b) Calcula el tamaño muestral mínimo necesario para que al estimar la media de agua recogida cada día en la estación meteorológica mediante la media de esta muestra, la amplitud del intervalo de confianza sea inferior a un litro, con un nivel de confianza del 98 %. (5 puntos)

a)

El intervalo de confianza para la media viene dado por $\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. La media de la muestra es $\bar{x}=\frac{8.8+3.8+6.5+3.6+5.5+7.5+3.5+8.9+7.9+4}{10}=6.0$. El nivel de confianza es del 95 %, por tanto

$$P\left(-Z_{\alpha/2}\le Z\le Z_{\alpha/2}\right)=0.95=1-\alpha \quad\Rightarrow\quad P\left(Z\le Z_{\alpha/2}\right)=0.95+\frac{\alpha}{2}=0.95+\frac{1-0.95}{2}=0.975 \quad\Rightarrow\quad Z_{\alpha/2}=1.96$$

Por tanto $\left(\bar{x}-Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x}+Z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(6-1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\ ,\ 6+1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{10}}\right)=(\mathbf{4.76\ ,\ 7.24})$

b)

El intervalo de confianza está centrado en $\bar{x}$ y su anchura es $2\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, la cual queremos que sea menor que 1 litro. El nivel de confianza cambia y por tanto debemos calcular nuevamente el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$P\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.98=1-\alpha \quad\Rightarrow\quad P\left(Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.98+\frac{\alpha}{2}=0.98+\frac{1-0.98}{2}=0.99 \quad\Rightarrow\quad Z_{\frac{\alpha}{2}}=2.325$$

Por tanto $2\cdot Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<1 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2.325\cdot\frac{2}{\sqrt{n}}<1 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 2.325\cdot 2<\sqrt{n} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{n}>9.3 \quad\Rightarrow\quad n>86.49 \quad\Rightarrow\quad \mathbf{n\ge 87}$