Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,0,-1) y corta a las rectas $s_1 \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}$ $s_2 \equiv \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$.

Podemos resolverlo de dos maneras distintas:

1- La recta pedida es la intersección de dos planos. Uno es el plano σ_1 que contiene a la recta s_1 y al punto P y el otro es el plano σ_2 que contiene a la recta s_2 y al punto P.

1.1- Para hallar σ_1 podemos hacerlo de dos maneras. Uno sería hallando el haz de planos de la recta s_1 y determinado cuál pasa por P. El otro sería hallando un punto Q y el vector director $\vec{v}_1$ de la recta que junto con P determinarán el plano σ_1

1.1.1- σ_1 a partir del haz de planos de la recta s_1 y determinado cuál pasa por P.

Escribo s_1 como intersección de dos planos.

$$s_1 \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} \\ \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+2y=6 \\ y+z=1 \end{cases}$$

Por tanto el haz de planos que determina la recta s_1 es una combinación lineal de ambos planos. $\alpha(x+2y-6)+\beta(y+z-1)=0$ y como P no pertenece a ninguno de los dos planos podemos escribir $x+2y-6+\delta(y+z-1)=0$. Imponiendo que el plano contenga a P, sustituyendo en el plano las coordenadas del punto P por x, y y z resulta $2+2\cdot 0-6+\delta\cdot(0-1-1)=0 \Rightarrow \delta=-2$. Sustituyendo δ en el haz de planos resulta $\sigma_1 \equiv x+2y-6-2\cdot(y+z-1)=0$ $\boxed{\sigma_1 \equiv x-2z-4=0}$.

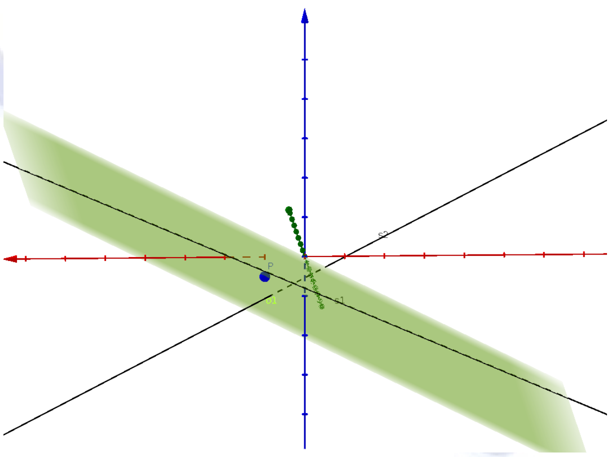
1.1.2- σ_1 a partir de un punto Q y el vector director $\vec{v}_1$ de la recta s_1.

El plano lo determino por un punto (P) y dos vectores contenido sen el plano, $\vec{v}_1$ y $\overrightarrow{PQ}$. De la ecuación de la recta s_1 $\vec{v}_1=(2,-1,1)$, Q(2,2,-1) y por tanto $\overrightarrow{PQ}=(0,2,0)$. Por tanto la ecuación del plano es

$$\sigma_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \sigma_1 \equiv 4(z+1)-2(x-2)=0 \quad \sigma_1 \equiv -2x+4z+8=0$$

Dividiendo entre -2 la ecuación anterior resulta

$$\boxed{\sigma_1 \equiv x-2z-4=0}$$



1.2- Para hallar σ_2 podemos hacerlo igual que σ_1 de dos maneras. Uno sería hallando el haz de planos de la recta s_2 y determinado cuál pasa por P. El otro sería hallando un punto R y el vector director $\vec{v}_2$ de la recta que junto con P determinarán el plano σ_2.

1.2.1- σ_2 a partir del haz de planos de la recta s_2 y determinado cuál pasa por P.

La recta s_2 viene dada como intersección de dos planos. Por tanto el haz de planos que determina la recta s_2 es una combinación lineal de ambos planos. $\alpha'(x+y+4)+\beta'(y-3z+3)=0$ y como P no pertenece a ninguno de los dos planos podemos escribir $x+y+4+\delta'(y-3z+3)=0$. Imponiendo que el plano contenga a P, sustituyendo en el plano las coordenadas del punto P por x, y y z resulta $2+0+4+\delta'\cdot(0-3\cdot(-1)+3)=0 \Rightarrow \delta'=-1$. Sustituyendo δ en el haz de planos resulta $\sigma_2 \equiv x+y+4-1\cdot(y-3z+3)=0$ $\boxed{\sigma_2 \equiv x+3z+1=0}$.

1.2.2- σ_2 a partir de un punto R y el vector director $\vec{v}_2$ de la recta s_2.

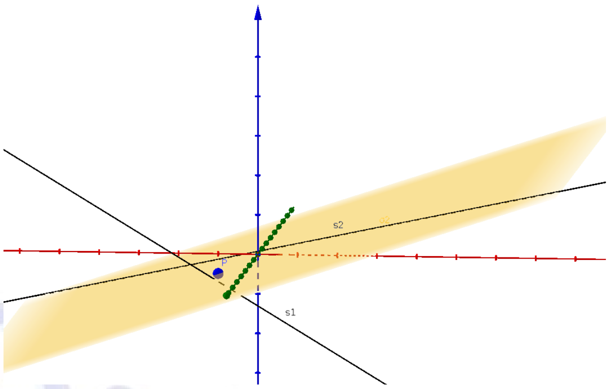
Escribo las ecuaciones paramétricas de la recta s_2.

$s_2 \equiv \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow y=3\lambda-3 \Rightarrow x=-3\lambda-1$. Por tanto R(-1,-3,0) y $\vec{v}_2=(-3,3,1)$. De aquí obtenemos $\vec{PR}=(-3,-3,1)$ y la ecuación del plano.

$$\sigma_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \sigma_2 \equiv 6(x-2)+18(z+1)=0 \quad \sigma_1 \equiv 6x+18z+6=0$$

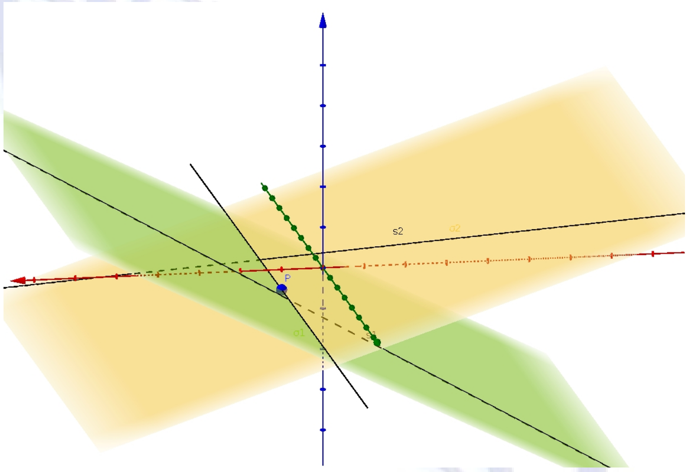
Dividiendo entre 6 la ecuación anterior resulta

$\boxed{\sigma_2 \equiv x+3z+1=0}$.



Por tanto la ecuación de la recta pedida es

$$\boxed{s_3 \equiv \begin{cases} x-2z-4=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\nu \\ z=-1 \end{cases}}$$



2- El segundo método consistiría en hallar un vector que pase por P y un punto genérico de s_1. Hallamos también un segundo vector que pase por P y un punto genérico de s_2. La condición es que los dos vectores sean paralelos y por tanto sus componentes deben ser proporcionales. De esta manera hallaremos el vector director de la recta pedida, que junto con el punto P determinarán la ecuación de la recta pedida.

2.1 Vectores genéricos $\overrightarrow{PX_1}$ y $\overrightarrow{PX_2}$.

Para hallar los puntos genéricos X_1 y X_2 de s_1 y s_2 respectivamente basta con que escribamos sus ecuaciones paramétricas.

$$s_1 \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{2}=\lambda \\ \frac{y-2}{-1}=\lambda \\ \frac{z+1}{1}=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2\lambda+2 \\ y=-\lambda+2 \\ z=\lambda-1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PX_1}=(2\lambda,\lambda+2,\lambda)$$

$$s_2 \equiv \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3\mu-1 \\ y=3\mu-3 \\ z=\mu \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PX_2}=(-3\mu-3,3\mu-3,\mu+1)$$

2.2 Proporcionalidad de los vectores $\overrightarrow{PX_1}$ y $\overrightarrow{PX_2}$.

$$\overrightarrow{PX_1} \propto \overrightarrow{PX_2} \Rightarrow \frac{2\lambda}{-3\mu-3}=\frac{\lambda+2}{3\mu-3}=\frac{\lambda}{\mu+1} \Rightarrow \frac{2\lambda}{-3\mu-3}=\frac{\lambda}{\mu+1} \Rightarrow \frac{2}{-3\mu-3}=\frac{1}{\mu+1}$$

$$2\mu+2=-3\mu-3 \Rightarrow 5\mu=-5 \Rightarrow \mu=-1 \Rightarrow \overrightarrow{PX_2}=(0,-6,0)$$

2.3 Recta que pasa por P(2,0,-1) y tiene por vector director $\overrightarrow{PX_2}$ o uno proporcional .

$$\boxed{s_3 \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=\nu \\ z=-1 \end{cases}}$$