Modelo A

1º Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 €. Se sabe que cobra 50€ por cada silla, 150 € por cada sillón y 200 € por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Calcula la cantidad de cada pieza que ha vendido.

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ 50x+150y+200z=1600 \\ z=\dfrac{x+y}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=15 \\ x+3y+4z=32 \\ x+y-4z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 4 & 32 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{F_2-F_1}{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$-5z=-15 \rightarrow z=3 \;,\; 2y+3z=17 \rightarrow y=4 \;,\; x+y+z=15 \rightarrow x=8$$

Ha vendido 3 butacas, 4 sillones y 8 sillas.

2º Discute el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ según los valores de k. Resuelve el sistema $AX=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a-

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3-k+2-2k^2 \rightarrow 3-k+2-2k^2=0 \rightarrow k=\frac{-1\pm\sqrt{61}}{6}$$

- Si $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{6} \rightarrow \operatorname{ran} A=2 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
- Si $k\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{6} \rightarrow \operatorname{ran} A=3$.

b- La matriz ampliada A* tiene $C_4 = C_2$ y por lo tanto ran A = ran A*. El sistema siempre será compatible, pero para que sea determinado el rango debe ser 3, es decir $k\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{61}}{6}$.

3º Encuentra un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}=(2,-1,1)$ y $\vec{b}=(1,0,3)$ y ortogonal a $\vec{c}=(2,3,0)$.

Si $\vec{v}$ es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces $\vec{v}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Si además $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{c}$ entonces $\vec{v}\cdot\vec{c}=0$.

$$\vec{v}\cdot\vec{c}=0 \rightarrow (\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\cdot\vec{c}=(\alpha(2,-1,1)+\beta(1,0,3))\cdot(2,3,0)=4\alpha+2\beta-3\alpha=0 \rightarrow \alpha+2\beta=0$$

Por tanto la solución no es única. Un ejemplo de solución sería $\alpha=-2,\ \beta=1 \rightarrow \vec{v}=(-3,2,0)$.

4º Encuentra si hay un valor del parámetro m para que el conjunto de vectores siguientes sean dependientes $\vec{a}=(1,2,-1)$, $\vec{b}=(-1,1,2)$ y $\vec{c}=(m,2,1)$. Calcula después el producto mixto de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

a- Para que sean linealmente dependientes $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c}$ $\alpha(1,2,-1)+\beta(-1,1,2)=(m,2,1)$ y el sistema debe ser compatible determinado.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\-1&2\end{pmatrix} \quad A'=\begin{pmatrix}1&-1&m\\2&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$$

Dado que el ran A = 2, para que el sistema pueda ser compatible determinado el ran A' = 2 y por tanto $|A'|=0$ → $|A'|=1+4m+2+m-4+2=5m+1=0$ → $m=-1/5$

b- $\vec{b}\times\vec{e}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-1&1&2\\-1&-2&3\end{vmatrix}=7\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{e})=(1,2,-1)\cdot(7,1,3)=7+2-3=6$

Modelo B

1ºDiscute el siguiente sistema según los diferentes valores del parámetro y resuélvelo cuando sea compatible.

$$\begin{cases}2x+2y-4z=1\\mx+y+z=0\\x+y+3z=-1\end{cases}$$

a- Para que sea compatible el ran A = ran A'. Analizo primero el ran A.

$$\begin{vmatrix}2&2&-4\\m&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=6-4m+2+4-2-6m=10-10m$$

- Si m ≠ 1 ran A = ran A' = 3 y por tanto el sistema será compatible determinado.
- Si m = 1, ran A = 2 $\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}\neq0$ y ran A' = 3 $\begin{vmatrix}2&4&1\\1&1&0\\1&3&-1\end{vmatrix}=2+3-1-4\neq0$ y el sistema será incompatible.

b- Empleando el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&-4\\0&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{8}{10-10m}=\frac{4}{5-5m} \quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-4\\m&0&1\\1&1&3\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-7m-1}{10-10m} \quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&2&1\\m&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-m+1}{10-10m}$$

2º Discute el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}k&1&1\\1&2&k\\-1&3&0\end{pmatrix}$ según los valores de k. Resuelve el sistema $AX=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Es el mismo ejercicio que el de la opción A.

3º Encuentra un vector con la misma dirección que $\vec{v}=(1,-2,3)$ y tal que forme con $\vec{w}=(-2,4,-1)$ un paralelogramo de 25 u^2 de área.

Un vector que tenga la misma dirección que $\vec{v}$ es un vector proporcional a $\vec{v}$, es decir $\vec{u}=a\vec{v}$. El módulo del vector que resulta al hacer el producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que determinan.

$$|a\vec{v}\times\vec{w}|=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a & -2a & 3a\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}=-10a\hat{i}-5a\hat{j} \quad |a\vec{v}\times\vec{w}|=\sqrt{100a^2+25a^2}=25 \rightarrow a^2=5 \rightarrow a=\pm\sqrt{5}$$

$$\vec{u}=(\pm\sqrt{5},\mp 2\sqrt{5},\pm 3\sqrt{5})$$

4º Encuentra el valor del parámetro m para que los vectores $\vec{a}=(-1,2,4)$ y $\vec{b}=(m,1,2)$ sean ortogonales. Encuentra el valor del mismo parámetro para que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tengan un producto mixto de valor 50 u^3.

a- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \rightarrow (-1,2,4)\cdot(m,1,2)=-m+10=0 \rightarrow m=10$$

b- $|\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})|=50$. $\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=6\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$.

$$|\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})|=|(m,1,2)\cdot(6,5,-1)|=|6m+5-2|=|6m+3|=50 \rightarrow \begin{cases}6m+3=50 \rightarrow m=47/6\\ 6m+3=-50 \rightarrow m=-53/6\end{cases}$$