INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
Examen álgebra, 1ª parte: Métodos Numéricos.
Septiembre 2010

4º Sea la ecuación diferencial $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$. Escribe fórmulas para calcular y_{i+1} en términos de y_i y cuatro pendientes ponderadas, de una manera similar al método de Runge-Kutta; las cuatro pendientes se calculan de la siguiente forma: la primera, en el punto (x_i,y_i); la segunda en el punto $(x_i+h/3, y(x_i+h/3))$, estimando linealmente $y(x_i+h/3)$ usando la pendiente anterior e y_i; la tercera, en el punto $(x_i+2h/3, y(x_i+2h/3))$, estimando linealmente $y(x_i+2h/3)$ usando la pendiente anterior e y_i; y la cuarta, en el punto $(x_i+h, y(x_i+h))$ estimando linealmente $y(x_i+h)$ con la estimación del punto $y(x_i+2h/3)$ y la pendiente anterior.

La solución numérica que se propone es una recta que pasa por (x_i,y_i) y cuya pendiente es el resultado de ponderar las cuatro pendientes que indica el enunciado. Como valor de la pendiente tomaremos una media de los cuatro valores, es decir $y_{i+1}=y_i+\frac{h}{4}(f_1+f_2+f_3+f_4)$ donde las f_i representan las diferentes pendientes.

Dado que la derivada de una función representa la pendiente de la recta tangente en el punto, $f(x_k,y_k)$ nos dará las pendientes que necesitamos en los diferentes puntos. Tal y como dice el enunciado para hallar los y_k tendremos que echar mano de las pendientes anteriores. Por lo tanto:

$$f_1=f(x_i,y_i)$$

$$f_2=f\left(x_i+\frac{h}{3},y\left(x_i+\frac{h}{3}\right)\right)\approx f\left(x_i+\frac{h}{3},y_i+\frac{h}{3}\cdot f_1\right)=f\left(x_i+\frac{h}{3},y_i+\frac{h}{3}\cdot f(x_i,y_i)\right)$$

$$f_3=f\left(x_i+\frac{2h}{3},y\left(x_i+\frac{2h}{3}\right)\right)\approx f\left(x_i+\frac{2h}{3},y_i+\frac{2h}{3}\cdot f_2\right)=f\left(x_i+\frac{2h}{3},y_i+\frac{2h}{3}\cdot f\left(x_i+\frac{h}{3},y_i+\frac{h}{3}\cdot f(x_i,y_i)\right)\right)$$

$$f_4=f(x_i+h,y(x_i+h))\approx f\left(x_i+h,y_i+\frac{2h}{3}\cdot f_2+\frac{h}{3}\cdot f_3\right)=$$
$$=f\left(x_i+h,y_i+\frac{2h}{3}\cdot f\left(x_i+\frac{h}{3},y_i+\frac{h}{3}\cdot f(x_i,y_i)\right)+\frac{h}{3}\cdot f\left(x_i+\frac{2h}{3},y_i+\frac{2h}{3}\cdot f\left(x_i+\frac{h}{3},y_i+\frac{h}{3}\cdot f(x_i,y_i)\right)\right)\right)$$

Como ejemplo voy a resolver la ecuación diferencial: $y'=x+y$, $y(0)=1$ cuya solución exacta es $y=2e^x-x-1$.

Según el método propuesto la solución sería la siguiente:

i	x_i	y_i	$2e^x-x-1$	f_1	f_2	f_3	f_4	y_{i+1}
0	0,00	1,00000	1,000000	1,00000	1,13333	1,28444	1,43674	1,24273
1	0,20	1,24273	1,242806	1,44273	1,60557	1,79014	1,97614	1,58345
2	0,40	1,58345	1,583649	1,98345	2,18235	2,40777	2,63495	2,04388
3	0,60	2,04388	2,044238	2,64388	2,88681	3,16212	3,43960	2,65050
4	0,80	2,65050	2,651082	3,45050	3,74720	4,08346	4,42236	3,43568
5	1,00	3,43568	3,436564					

Los resultados pueden compararse con el Runge-Kutta RK4 y el Euler y Euler mejorado.

i	x_i	y_i Runge-Kutta	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1} Runge-Kutta	$2e^x-x-1$	y_i Euler	y_i Euler mejorado
0	0,00	1,000000	1,000000	1,200000	1,220000	1,444000	1,24280	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,20	1,242800	1,442800	1,687080	1,711508	1,985102	1,58364	1,24281	1,20000	1,24000
2	0,40	1,583636	1,983636	2,282000	2,311836	2,646003	2,04421	1,58365	1,48000	1,57200
3	0,60	2,044213	2,644213	3,008634	3,045076	3,453228	2,65104	2,04424	1,85600	2,01480
4	0,80	2,651042	3,451042	3,896146	3,940656	4,439173	3,43650	2,65108	2,34720	2,59100
5	1,00	3,436502					4,44014	3,43656	2,97664	3,32776