Estudia los puntos de derivabilidad de la función $f(x)=|x^3+x^2-x-1|$. Calcula la derivada donde exista.

Se trata de una función polinómica y por lo tanto es una función continua. Asegurada la continuidad pasamos a la derivabilidad. Los puntos críticos de dicha función corresponden a las raíces del polinomio. En dichos puntos la función $g(x)=x^3+x^2-x-1$ puede cambiar de signo y por lo tanto la pendiente de la recta tangente podría cambiar de signo. Por Ruffini

	1	1	-1	-1
1		1	2	1
	1	2	1	0
-1		-1	-1	
	1	1	0	

Determinamos el signo de la función $g(x)$ en los tres intervalos en los que queda dividida la recta real.

		-1		1	
$g(x)$	-		-		+

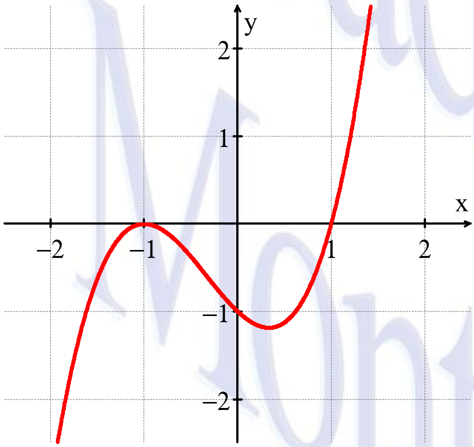
En aquellos intervalos en los que $g(x)$ sea positiva $f(x)=g(x)$ y en aquellos en los que $g(x)$ sea negativa $f(x)=-g(x)$. Así la función $f(x)$ podemos reescribirla como

$$f(x)=\begin{cases} -x^3-x^2+x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^3+x^2-x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

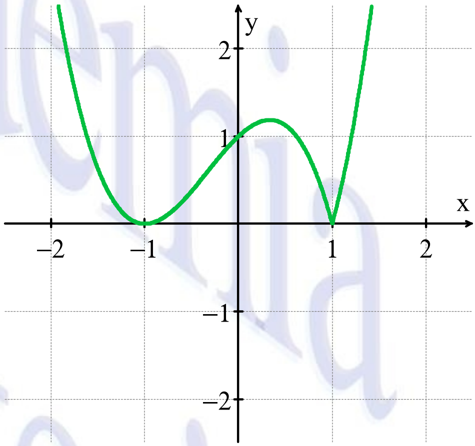
Voy a hacer una representación aproximada de $g(x)$ a partir de la información que tenemos (cortes con el eje de abscisas y signo de la función) junto con su primera derivada (extremos relativos monotonía). La función

$f(x)$ se obtiene fácilmente a partir de la de $g(x)$ simplemente por reflexión a lo largo del eje de abscisas de la parte negativa de la función.
$g'(x)=3x^2+2x-1 \Rightarrow 3x^2+2x-1=0 \Rightarrow x_1=-1\ ,\ x_2=1/3$

		-1		1/3	
$g'(x)$	+		-		+
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$g(x)=x^3+x^2-x-1$



$f(x)=|x^3+x^2-x-1|$

En $x=-1$ $g(x)$ no cambia de signo y el paso por ese punto de la función $f(x)$ es suave por lo tanto las derivadas laterales van a coincidir y la función será derivable en $x=-1$.

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \Rightarrow \exists\, f'(-1)$$

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)+f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-(h-1)^3-(h-1)^2+(h-1)+1-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h^3+3h^2-3h+1-h^2+2h-1+h-1+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^3+2h^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}-h^2+2h=0$$

En $x=1$ $g(x)$ cambia de signo y el paso por ese punto de la función $f(x)$ ya no es suave, por lo tanto las derivadas laterales no van a coincidir y la función no será derivable en $x=1$. A partir de la definición.

$$f'(1^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)+f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(h+1)^3-(h+1)^2+(h+1)+1-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3-3h^2-3h-1-h^2-2h-1+h+1+1}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^3-4h^2-4h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}-h^2-4h-4=-4$$

$$f'(1^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)+f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(h+1)^3+(h+1)^2-(h+1)-1-0}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3+3h^2+3h+1+h^2+2h+1-h-1-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^3+4h^2+4h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}h^2+4h+4=4$$

Por lo tanto $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\Rightarrow\nexists\ f'(1)$