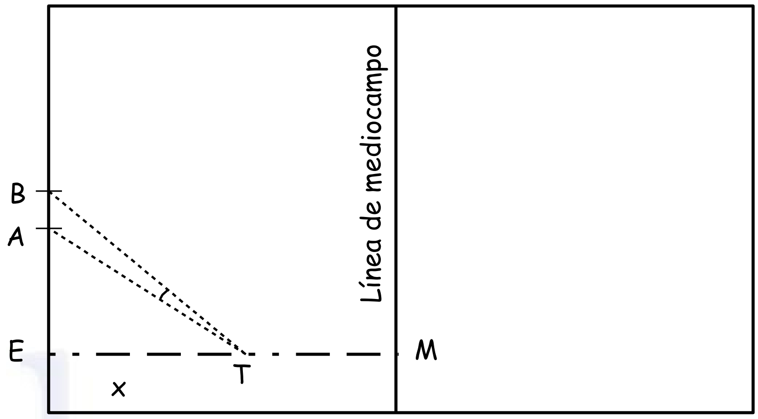
Clases de matemáticas, física y química
Tel.: 665.516.510

Ejercicio 4.

En un partido de rugby, un jugador debe transformar un ensayo que ha sido marcado en el punto E (ver figura) situado en el exterior del segmento AB. La transformación consiste en lanzar el balón con una patada desde el punto T que el jugador puede elegir a lo largo del segmento EM perpendicular a AB salvo en E. La transformación tienen éxito si la pelota pasa entre los palos marcados por los puntos A y B en la figura.



Para maximizar las opciones de éxito el jugador intenta determinar si existe una posición para el punto T que hace que el ángulo $\widehat{ATB}$ sea máximo. El propósito de este ejercicio es examinar si existe una posición para el punto T sobre el segmento EM que hace que el ángulo $\widehat{ATB}$ sea máximo, y si este es el caso determinar un valor aproximado de este ángulo.

Las dimensiones del campo son las siguientes: EM=50 m, EA = 25 m y AB = 5,6 m. Denotamos por α la medida en radianes del ángulo $\widehat{ETA}$, β la medida en radianes del ángulo $\widehat{ETB}$ y γ la medida en radianes del ángulo $\widehat{ATB}$.

1. Utilizando los triángulos rectángulos $\widehat{ETA}$ y $\widehat{ETB}$ así como las longitudes proporcionadas, expresar tan α y tan β en función de x.

La función tangente está definida en el intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ por $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

$$\tan\alpha=\frac{x}{25} \qquad \tan\beta=\frac{x}{30{,}6}$$

2. Probar que la función tan x es estrictamente creciente sobre el intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

$$f(x)=\tan x \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \quad y\;\; f'(x)>0 \;\;\forall\;\; x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\;\Rightarrow\; \text{estrictamente creciente}$$

3. De la figura puede observarse que el ángulo $\widehat{ATB}$ admite una medida γ perteneciente al intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Admitiendo que, para todos los reales a y b del intervalo $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$. Probar que $\tan\gamma=\frac{5.6x}{x^2+765}$.

$$\tan\gamma=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\frac{x}{25}-\frac{x}{30{,}6}}{1+\frac{x}{25}\cdot\frac{x}{30{,}6}}=\frac{\frac{30{,}6x-25x}{30{,}6\cdot 25}}{\frac{25\cdot 30{,}6+x^2}{25\cdot 30{,}6}}=\frac{5.6x}{x^2+765}$$

4. El ángulo $\widehat{ATB}$ es máximo cuando su medida γ es máxima. Probar que esto corresponde a un mínimo sobre el intervalo $]0,50[$ de la función definida por: $f(x)=x+\frac{765}{x}$.
Probar que existe un único valor de x para el cual el ángulo $\widehat{ATB}$ es máximo y determinar el valor de x en metros obtenido así como la medida del ángulo $\widehat{ATB}$ con una precisión de 0.01 radianes.

Si γ es máximo, entonces tan γ es máxima.

$$\tan\gamma=\frac{5.6x}{x^2+765} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan\gamma}{5,6}=\frac{x}{x^2+765}=\frac{1}{\frac{x^2+765}{x}}=\frac{1}{x+\frac{765}{x}}=\frac{1}{f(x)}$$

Si $\frac{\tan\gamma}{5,6}$ es máximo $\Rightarrow$ f(x) es mínimo. Si f(x) presenta un mínimo local su primera derivada debe ser cero.

$$f'(x)=1-\frac{765}{x^2}=0 \quad \Rightarrow \quad 1=\frac{765}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{765}$$

Como x representa una longitud sólo la solución positiva tiene sentido $x=\sqrt{765}$ m. Debemos comprobar que efectivamente se trata de un mínimo local para f(x)

	0		$\sqrt{765}$		50
f'(x)	∄	-	0	+	∄
f(x)	∄	↘	55.3	↗	65.3

Luego efectivamente en $x=\sqrt{765}$ hay un mínimo local.

Determinamos el ángulo γ

$$\tan\gamma=\frac{5.6\sqrt{765}}{\sqrt{765}^2+765}=\frac{5.6\sqrt{765}}{1530} \quad \Rightarrow \quad \gamma=\arctan\frac{5.6\sqrt{765}}{1530}=0.10089...\approx 0.10 \ \text{rad}$$