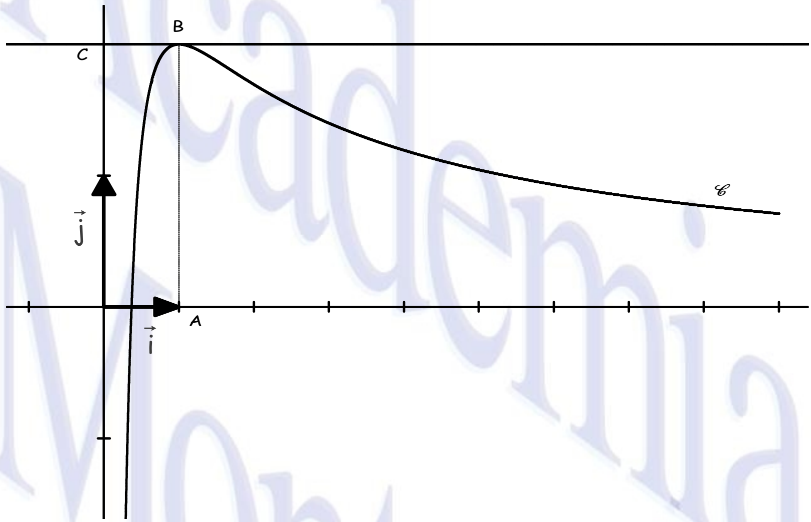
EXERCICE 2 (7 points)

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1, 0), (1, 2), (0, 2) ;
- la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathscr{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$$

1.

a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de f (1) et f' (1).

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.

2.

a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f .

3.

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

1.

a.

De la gráfica $(1,f(1))$ es el punto B, por tanto $f(1) = 2$.

$f'(1)$ representa la pendiente de la recta tangente a $\mathscr{C}$ en $x=1$, la cual resulta paralela al eje de abscisas. Por tanto la pendiente es nula y $f'(1)=0$

b.

$$f'(x)=\frac{b\cdot\frac{1}{x}\cdot x-(a+b\ln x)}{x^2}=\frac{b-a-b\ln x}{x^2}$$

c.

Imponemos las condiciones de que la curva pasa por el punto (1,2) y que la pendiente de la recta tangente en dicho es cero.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=2 \quad\Rightarrow\quad \frac{a+b\ln 1}{1}=2 \quad\Rightarrow\quad a=2 \\ f'(1)=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{b-a-b\ln 1}{1}=0 \quad\Rightarrow\quad b=a \quad\Rightarrow\quad b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\quad f(x)=\frac{2+2\ln x}{x}$$

2.

a.

$$f'(x)=\frac{-2\ln x}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } \dfrac{-2\ln x}{x^2}>0 \quad \overset{\text{como } x^2>0}{\Rightarrow} \quad -2\ln x>0 \Rightarrow -\ln x>0 \\ \text{si } \dfrac{-2\ln x}{x^2}<0 \quad \overset{\text{como } x^2>0}{\Rightarrow} \quad -2\ln x<0 \Rightarrow -\ln x<0 \end{cases}$$

b.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+2\ln x}{x}=\frac{2+2\ln 0^+}{0^+}=\frac{2-\infty}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2+2\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{\text{T.L'H}}{=}\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1}=\frac{2}{\infty}=0^+$$

c.

$$f'(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 2\ln x=0 \Rightarrow x=1$$

		1	
$f'(x)$	+		-
	$\nearrow$		$\searrow$

Por tanto la función es creciente en el intervalo]0,1[y decreciente en]1,+∞[. Además el punto (1,2) es un máximo local.

3.

a.
$f(x)=1 \Rightarrow f(x)-1=0$. Definimos una nueva función $h(x)=f(x)-1$. Si $f(x)-1=0 \Rightarrow h(x)=0$. Se trata de probar que h(x) tiene una única raíz en el intervalo]0,1]. Si h(x) cambia de signo en el intervalo sólo existirá una única raíz, siendo h(x) una función continua (T. de Boltzano) y creciente. Efectivamente $h(0^+) < 0$ y $h(1) > 0 \Rightarrow$ existe al menos una raíz en el intervalo]0, 1]. Dado que $h(x)=f(x)-1 \Rightarrow h'(x)=f'(x)$, por tanto el signo de $h'(x)$ es el mismo que el de $f'(x)$ y por tanto (pregunta 2 c) $h'(x)$ es creciente en el intervalo]0,1]. De esta manera queda demostrado que la raíz es única.

b.
h(2) > 0 y h(10) < 0. Como la función es continua en todo el intervalo]1,+∞[debe existir al menos una raíz en el intervalo entre]2,10[. Como la función es decreciente no puede haber más cambios de signo de la función y por tanto no puede haber raíces en]1,2[y]10,+∞[. Nuevamente como la función es decreciente la raíz es única.

Puede probarse que $h(5) \approx 0.044$ y $h(6) \approx -0.069$. Por lo tanto n = 5.