OPCIÓN B

1. Sea A la matriz siguiente: $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ donde a es un valor real. Calcula A^2 A^3 y A^4 (4 puntos) y da una fórmula general para la expresión de A^n .(6 puntos)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a & a^2 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A\cdot A^3=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 3a^2 & a^3 & 0 \\ 3a & 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^4 & 0 & 0 \\ 4a^3 & a^4 & 0 \\ 6a^2 & 4a^3 & a^4 \end{pmatrix}$$

Para hallar A^n nos fijamos en las potencias que ya hemos y hallado y concluimos que:

- Todos los elementos por encima de la diagonal principal son siempre 0.

- Los elementos de la diagonal principal son potencias de a elevados a la misma potencia que la matriz (n).

- Los elementos a_{23} y a_{32} son iguales. Además son el producto de la potencia de la matriz (n) multiplicado por a elevado a una potencia menor que la de la matriz (n-1).

- a_{31} es una potencia de a elevado a dos unidades menos que la matriz (n-2) multiplicado por un coeficiente:0, 1, 3, 6, … Si calculásemos A^5 obtendríamos 10

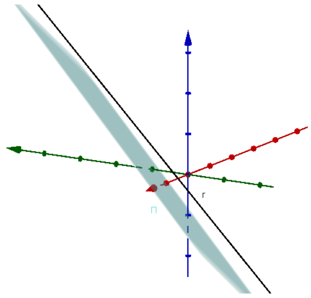
Potencia	coeficiente
1	0
2	1=0+1
3	3=0+1+2
4	6=0+1+2+3
5	10=0+1+2+3+4

Lo que tenemos es la suma de los términos de una progresión aritmética (0,1,2,3,4,....) en la que el primer término es 0 y la diferencia es 1. La suma de n términos de una progresión aritmética es $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$, es decir la semisuma del primer y último término a sumar multiplicado por el número de términos a sumar. En nuestro caso $S_n=\frac{(0+n-1)\cdot n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$. Por tanto la potencia enésima de A queda:

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ n\cdot a^{n-1} & a^n & 0 \\ \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^{n-2} & n\cdot a^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

2. Determina m para que la recta $\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{m}=\frac{z+3}{3}$ sea paralela al plano x + y − z = 5 (5 puntos) y calcula la distancia entre ellos. (5 puntos)

Si la recta es paralela al plano entonces el vector director de la recta debe ser perpendicular al vector normal al plano. Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero.

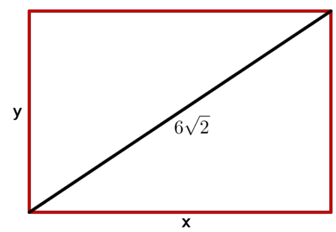


$$\vec{d}_r=(-1,m,3)\ ;\quad \vec{n}_\pi=(1,1,-1)\quad \vec{d}_r\perp\vec{n}_\pi\ \Rightarrow\ \vec{d}_r\cdot\vec{n}_\pi=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad(-1,m,3)\cdot(1,1,-1)=-1+m-3=0\quad\Rightarrow\quad m=4$$

Como la recta es paralela al plano todos sus punto estarán a la misma distancia del plano. Un punto P de la recta r es (0,-1,-3).

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 0+1\cdot(-1)-1\cdot(-3)-5|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|-1+3-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ \text{u}$$

3. De todos los rectángulos de diagonal $6\sqrt{2}$ cm, determina el rectángulo de perímetro máximo. (10 puntos)



La función a optimizar es el perímetro del rectángulo P = 2·x + 2·y sometida a la condición de que la diagonal sea igual a $6\sqrt{2}$. Por el Teorema de Pitágoras, el cuadrado de la diagonal es igual a la suma de los cuadrados de los lados del rectángulo $x^2+y^2=72$. Despejando y y sustituyendo en el perímetro obtendremos una función de una sola variable. X e y representan longitudes por tanto solo las soluciones positivas tiene sentido.

$$\left.\begin{array}{l} P=2x+2y \\ x^2+y^2=72 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P=2x+2y \\ x=\sqrt{72-y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow P=2x+2\sqrt{72-y^2}$$

Si el perímetro es máximo es necesario que su primera derivada sea cero.

$$P'=2+\frac{2\cdot(-2y)}{2\sqrt{72-y^2}} \Rightarrow 2-\frac{2y}{\sqrt{72-y^2}}=0 \Rightarrow 2=\frac{2y}{\sqrt{72-y^2}} \Rightarrow 2\sqrt{72-y^2}=2y \Rightarrow 4(72-y^2)=4y^2 \Rightarrow 288=8y^2$$

$$y^2=36 \Rightarrow y=6$$

Comprobamos que efectivamente se trata de un máximo analizando el signo de la derivada a ambos lados del valor que anula la derivada

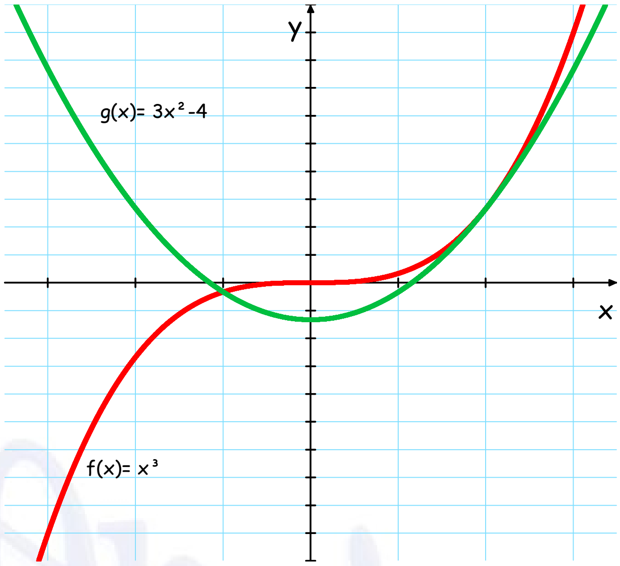
		6	
P'(y)	+	0	-
P(y)	↗	24	↘

Por tanto y = 6 es un máximo. Para esta altura la longitud d ella base debe ser también 6 cm y por tanto resulta un cuadrado.

Aplicación hecha con Geogebra

4. Consideremos las funciones f (x) = x^3 y g(x) = $3x^2$ - 4. Haz un dibujo aproximado de las funciones anteriores para $x\in[-3,3]$ (6 puntos). Calcula el área limitada por las gráficas de les funciones anteriores. (4 puntos)

f(x) es un polinomio por tanto su dominio es toda la recta real, continua, antisimétrica, corta a los ejes en el origen, creciente, no presenta ni máximos ni mínimos, no tiene asíntotas, es cóncava para x > 0 y convexa para x < 0.

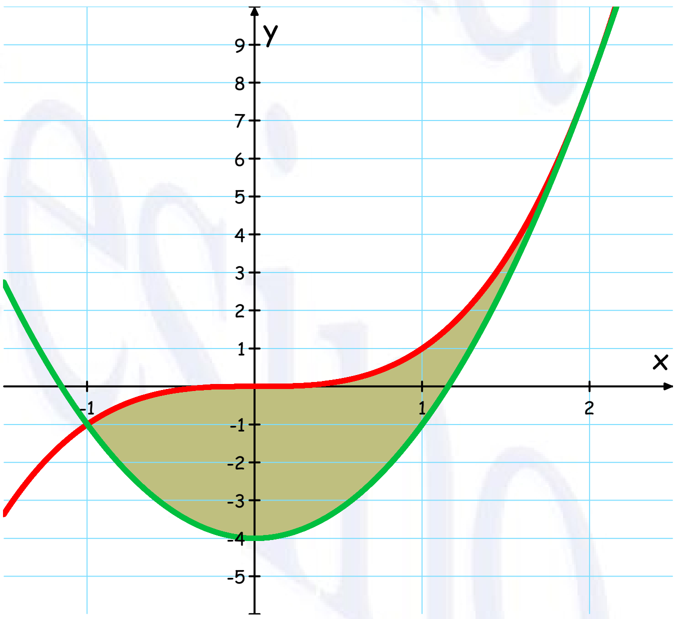


g(x) es un polinomio de segundo grado por tanto su representación gráfica es una parábola, su dominio es toda la recta real, continua, simétrica, corta a los ejes en (0,-4), $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$ y $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$, cóncava, con vértice en $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{6}=0 \Rightarrow (0,-4)$, mínimo en el vértice, decreciente de $(-\infty,0)$ y creciente $(0,\infty)$.

Para hallar el área entre las curvas debemos determinar los puntos de intersección entre ambas funciones. $x^3=3x^2-4 \Rightarrow x^3-3x^2+4=0$. Por Ruffini

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	0
2		2	-4	
	1	-2	0	
2		2		
	1	0		

Por tanto el área sombreada es la integral de f(x) - g(x) entre -1 y 2.



$$\text{área}=\int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+4)dx=H(2)-H(-1)$$

$$H(x)=\int(x^3-3x^2+4)\,dx=\frac{x^4}{4}-x^3+4x$$

$$H(2)=\frac{2^4}{4}-2^3+4\cdot 2=4-8+8=4$$

$$H(-1)=\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^3+4\cdot(-1)=\frac{1}{4}+1-4=-\frac{11}{4}$$

$$\text{área}=4+\frac{11}{4}=\frac{27}{4}\ u^2$$