Opción A

1. a) Discute para que valores de a el sistema siguiente es compatible: $\left.\begin{array}{l} a\cdot x+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{array}\right\}$ (7 punts)

b) Resuélvelo en el caso (o casos) en qué sea compatible. (3 punts)

Para que le sistema sea compatible los rangos de la matriz de los coeficientes A y la matriz ampliada A^{*} deben coincidir.

Primero determino el rango de $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, que como mucho puede ser 3. Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ Rang(A)=3. Por tanto, para que le sistema sea compatible el Rang(A^{*})=3 y por tanto $|A^{*}|=0$.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1+c_2 & & c_3+c_2 & c_4+c_2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 2 & a^2+1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} \end{array} = -1 \begin{vmatrix} a+1 & 2 & a^2+1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} = -1 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1+c_2 & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+3 & 2 & a^2+1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3a-1 \end{vmatrix} \end{array} = -1\cdot(-2) \begin{vmatrix} a+3 & a^2+1 \\ 5 & 3a-1 \end{vmatrix} =$$

$$=2((a+3)(3a-1)-5(a^2+1))=-4a^2+16a-16 \;\Rightarrow\; -4a^2+16a-16=0 \;\Rightarrow\; a^2-4a+4=0 \;\Rightarrow\; (a-2)^2=0 \;\Rightarrow\; a=2$$

Por lo tanto:

- Si a = 2 $\Rightarrow$ Rang(A) = Rang(A^{*}) = 3 y el sistema será compatible determinado.

- Si a ≠ 2 $\Rightarrow$ Rang(A) = 3 ≠ Rang(A^{*}) = 4 y el sistema será incompatible.

2. Estudia la posición relativa de las rectas (6 punts):

$$r:\ \frac{x-2}{-3}=\frac{y-3}{5}=z\ ,\qquad s:\ \begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}$$

y, en caso de que se corten, encuentra el punto de intersección (4 punts).

El problema de la posición relativa de dos rectas se reduce a analizar el sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$r:\begin{cases}x=2-3\lambda\\ y=3+5\lambda\\ z=\lambda\end{cases},\qquad s:\begin{cases}x=1-t\\ y=2t\\ z=5\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}2-3\lambda=1-t\\ 3+5\lambda=2t\\ \lambda=5\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}t-3\lambda=-1\\ -2t+5\lambda=-3\\ \lambda=5\end{cases}$$

Si Rang(A) = Rang(A*) = 2 $\Rightarrow$ S.C.D $\Rightarrow$ Las rectas serán secantes ya que el sistema tiene solución única que será el punto donde se cruzan.

Si Rang(A) = Rang(A*) = 1 $\Rightarrow$ S.C.I $\Rightarrow$ Las rectas serán coincidentes ya que el sistema tiene infinitas soluciones que son todos los puntos de la recta.

Si Rang(A) = 1 ≠ Rang(A*) = 2 $\Rightarrow$ S.I. $\Rightarrow$ Las rectas son paralelas ya que el sistema no tiene solución y por tanto no hay ningún punto en común.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 5\end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow \text{Rang}(A)=2$$

$$A'=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 5 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 5 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow \text{Rang}(A^*)=2$$

Por tanto las rectas son secantes y la solución del sistema nos dará el punto donde se cortan.

$$\begin{cases}t-3\lambda=-1\\ -2t+5\lambda=-3\\ \lambda=5\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}-2t+5\lambda=-3\\ \lambda=5\end{cases}\ \Rightarrow\ \lambda=5\ ;\ t=14\ \Rightarrow\ x=-13\ ,\ y=28\ ,\ z=5$$

3. Determina los valores de a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$. (10 punts)

Imponemos las condiciones:

Pasa por (1,0) $\Rightarrow$ $f(1) = 0$ $\Rightarrow$ $1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 0$ $\Rightarrow$ $a + b + c = -1$

Máximo relativo en $x = -1$ $\Rightarrow$ $f'(-1) = 0$ $\Rightarrow$ $3\cdot(-1)^2 + 2\cdot a\cdot(-1) + b = 0$ $\Rightarrow$ $-2a+b=-3$

Mínimo relativo en $x = 0$ $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$ $\Rightarrow$ $3\cdot 0^2 + 2\cdot a\cdot 0 + b = 0$ $\Rightarrow$ $b=0$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=-1 \\ -2a+b=-3 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+c=-1 \\ a=\frac{3}{2} \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2}+c=-1 \\ a=\frac{3}{2} \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-\frac{5}{2} \\ a=\frac{3}{2} \\ b=0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}}$$

4. Calcula la integral indefinida siguiente: (10 punts)

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}\,dx$$

Se trata de una integral racional y como el grado del numerador es menor que el denominador empezamos descomponiéndola en fracciones simples.

$$\frac{2x+5}{(x+3)^3}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3} \Rightarrow 2x+5=A\cdot(x+3)^2+B\cdot(x+3)+C \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \Rightarrow -1=C \\ x=0 \Rightarrow 5=9A+3B+C \\ x=-2 \Rightarrow 1=A+B+C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-1 \\ 9A+3B=6 \\ A+B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=-1 \\ 3A+B=2 \\ A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x+5}{(x+3)^3}dx=\int \frac{2}{(x+3)^2}dx-\int \frac{1}{(x+3)^3}dx=-\frac{2}{x+3}+\frac{1/2}{(x+3)^2}+K$$