Clases de matemáticas, física y química
Tel.: 665.516.510

2. Siguin $P=(a_1,b_1,c_1)$ i $Q=(a_2,b_2,c_2)$ dos punts del pla $Ax+By+Cz+D=0$. Demostrau que el vector $\overrightarrow{PQ}$ és perpendicular al vector $\vec{n}=(A,B,C)$ (4 punts). Aplicau-ho per calcular l'equació general del pla que conté els punts $P=(1,2,3), Q=(-1,0,2)$ i $R=(1,1,1)$ (6 punts).

a.

Si P y Q son puntos del plano $Ax+By+Cz+D=0$, entonces $\begin{cases} A a_1+Bb_1+Cc_1+D=0 \\ A a_2+Bb_2+Cc_2+D=0 \end{cases}$ o lo que es equivalente $\begin{cases} A a_1+Bb_1+Cc_1=-D \\ A a_2+Bb_2+Cc_2=-D \end{cases}$. Para demostrar que $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{n}=(A,B,C)$ son perpendiculares podemos usar el producto escalar, el cual debe ser cero $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$.

$$(A,B,C)\cdot(a_2-a_1,b_2-b_1,c_2-c_1)=A(a_2-a_1)+B(b_2-b_1)+C(c_2-c_1)=$$

$$=A a_2+Bb_2+Cc_2-(A a_1+Bb_1+Cc_1)=-D-(-D)=-D+D=0$$

b.

Lo primero que tenemos que hacer es hallar el vector normal del plano. Para ello tenemos tres puntos del plano no alineados y que permite determinar dos vectores contenidos en el plano que no son paralelos. Su producto vectorial nos proporcionará las componentes del vector normal.

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,0,2)-(1,2,3)=(-2,-2-1)\ ,\ \overrightarrow{PR}=(1,1,1)-(1,2,3)=(0,-1,-2)$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\left(\begin{vmatrix}-2 & -1 \\ -1 & -2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}-2 & -1 \\ 0 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2 & -2 \\ 0 & -1\end{vmatrix}\right)=(3,-4,2)$$

Siendo X un punto genérico del plano tenemos que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}=0$.

$$\overrightarrow{PX}=(x,y,z)-(1,2,3)=(x-1,y-2,z-3)\ ,\ \overrightarrow{PX}\cdot\vec{n}=(x-1,y-2,z-3)\cdot(3,-4,2)$$
$$3(x-1)-4(y-2)+2(z-3)=0\ ,\ 3x-4y+2z-1=0$$