1. Es considereren les matrius de la forma $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & \sin x & \cos x\end{pmatrix}$ **x R. Es demana:**

i) Calcular A(0), A(π/2), A(−π/2), A(π), A(−π). (1.25 punts)

ii) Demostrar que A(x) té inversa qualsevol que sigui x. Calculau la inversa. (5 punts)

iii) Calcular els valors de x tals que A(x) = I (matriu identitat). És cert que A(x) ≠ A(y) sempre que x ≠ y? (3.75 punts)

i)

$$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad A(\pi/2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\quad A(-\pi/2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\quad A(\pi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad A(-\pi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

ii) A tendrá inversa si su determinante es distinto de cero. $|A|=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, por lo tanto la matriz tiene inversa.

iii)

$$A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & \sin x & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad \Rightarrow \begin{cases}\cos x=1 \ \Rightarrow x=2n\pi\\ \sin x=0 \ \Rightarrow x=k\pi\end{cases} \Rightarrow\ x=2n\pi$$

Por lo tanto A(x) = I siempre que x sea un un número entero de veces 2 π.

$$A(x)=A(y)\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & \sin x & \cos x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos y & -\sin y\\ 0 & \sin y & \cos y\end{pmatrix}\ \Rightarrow \begin{cases}\cos x=\cos y\ \Rightarrow\ x=y+2n\pi\\ \sin x=\sin y\ \Rightarrow\ x=y+2n\pi\end{cases}\quad n\in\mathbb{Z}$$

Por lo tanto A(x) = A(y) siempre que la diferencia x – y sea un número entero de veces 2 π.

2. Demostrau que el punt A = (–1,1,0) no és coplanari amb els punts B = (0,0,0), C = (0,1,0) i D = (1,2,1) (4 punts). Calculau la distància de A al pla determinat per B, C i D (6 punts).

Si A no es coplanario con B, C y D no pertenecerá al plano que determinan B, C y D. Primero hallo el plano que determinan esos tres puntos.

$$\vec{BC}=(0,1,0)\ ,\ \vec{BD}=(1,2,1)\ \Rightarrow\ \sigma\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\ ,\ x-z=0$$

Sustituyendo las coordenadas x z en la ecuación del plano σ vemos que el punto no pertenece a dicho plano.

$$\sigma\equiv x-z=0\ \xrightarrow{si\ A\in\sigma}\ -1-0\neq 0$$

$$d(A,\sigma)=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot(-1)+0\cdot 1+(-1)\cdot 0+0|}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

3. Es considera la funció y = f(x), definida a l'interval [0,≠], de la forma següent:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{x^2-x}{\sin x} & \text{si } 0<x<\pi \\ 0 & \text{si } x=\pi \end{cases}$$

i) Estudiau-ne la continuïtat (6 punts).

ii) Dibuixau la funció en un entorn de x = 0 i de x = π (4 punts).

i) La función x^2-x es una función polinómica continua en todo $\mathbb{R}$. La función $\sin x$ es una función trigonométrica continua en todo $\mathbb{R}$. El cociente de estas dos funciones será una función continua siempre que el denominador no se anule. La función $\sin x$ no se anula en el intervalo 0< x < π. Por lo tanto de momento la función es continua en el intervalo (0,π). Para saber si la función es continua a la derecha de 0 y a la izquierda de π debemos asegurar que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ para a = 0 y a = π.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{T.L'H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{\cos x}=-1=f(0)$$ ⇒ continua a la derecha de 0.

$$\lim_{x\to \pi^-}\frac{x^2-x}{\sin x}=\frac{\pi^2-\pi}{0^-}=-\infty\neq f(\pi)\Rightarrow$$ no es continua a la izquierda de π.

Por lo tanto la función es continua en el intervalo [0,π).

ii)

En la representación gráfica se observa que x = π es una asíntota vertical

4. La recta y = 2x – 2 és una asímptota obliqua de la funció $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+k}$. Calculau el valor de k (4 punts) i els extrems relatius d'aquesta funció (6 punts).

La recta y = m x + n es una asíntota oblicua de la función f(x) con $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x(x+k)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x+k}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1-2x(x+k)}{x+k}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2kx}{x+k}=-2k=-2 \Rightarrow k=1$$

Para hallar los extremos de la función f '(x) = 0 y f ''(x) ≠ 0. $f(x)=\frac{2x^2+1}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{4x(x+1)-(2x^2+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2} \quad f'(x)=0\Rightarrow 2x^2+4x-1=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$$

$$f''(x)=\frac{(4x+4)(x+1)^2-(2x^2+4x-1)2(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{6}{(x+1)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}>0\ ) \\ f''(\frac{-2-\sqrt{6}}{2})<0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2},\frac{-12+7\sqrt{6}}{6}\right) \text{ mínimo} \qquad \left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2},-4-2\sqrt{6}\right) \text{ máximo}$$