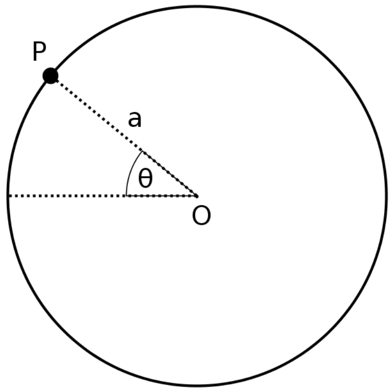
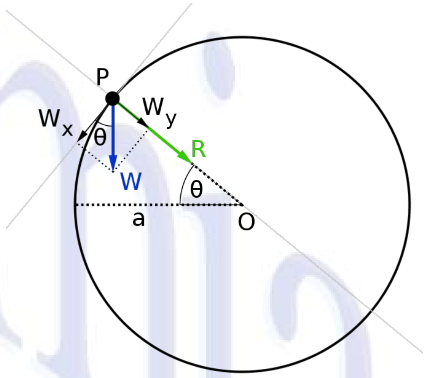
7º In crazy golf, a golf ball is hit so that it starts to move in a vertical circle on the inside of a smooth cylinder. Model the golf ball as a particle, P, of mass m. The circular path of the golf ball has radius a and centre O. At time t, the angle between OP and the horizontal is θ, as shown in the diagram. The golf ball has speed u at the lowest point of its circular path.

(a) Show that, while the golf ball is in contact with the cylinder, the reaction of the cylinder on the golf ball is $\frac{mu^2}{a}-3mg\sin\theta-2mg$ (6 marks)



(b) Given that $u=\sqrt{3ag}$, the golf ball will not complete a vertical circle inside the cylinder. Find the angle which OP makes with the horizontal when the golf ball leaves the surface of the cylinder. (4 marks)

a.

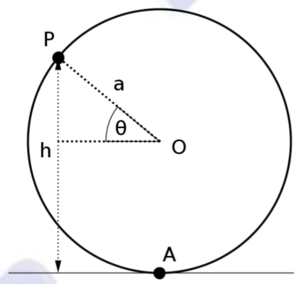


Las fuerzas que aparecen sobre la bola en el punto P son el peso W y la reacción de la superficie R. Descomponemos el peso W a lo largo del sistema de ejes; una componente paralela a R (W_y) y otro perpendicular (W_x).

Aplicando la segunda ley de Newton $\sum\vec{F}=m\vec{a}$ a lo largo del eje radial tenemos $W_y+R=ma_c$ (1) donde a_c representa la aceleración centrípeta o normal.

La ecuación (1) queda por tanto $mg\cdot\sin\theta+R=m\frac{v_p^2}{a}$ (2), siendo v_p la velocidad de la partícula en el punto P. Además el cilindro esta pulido y por tanto podemos considerar que la energía mecánica se conserva.

Tomamos el nivel de referencia en el punto más bajo de la circunferencia, donde la velocidad es u.



$$E_A=E_P \Rightarrow \frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv_p^2+mgh \Rightarrow u^2=v_p^2+2gh$$

$$v_p^2=u^2-2g(a+a\cdot\sin\theta) \Rightarrow v_p^2=u^2-2ga(1+\cdot\sin\theta) \quad (3)$$

Sustituyendo la ecuación (3) en (2) resulta

$$mg\cdot\sin\theta+R=m\left(\frac{u^2}{a}-2g(1+\sin\theta)\right) \Rightarrow R=m\left(\frac{u^2}{a}-g(2+3\cdot\sin\theta)\right) \quad (4)$$

b.

Efectivamente, para poder completar la circunferencia, la mínima velocidad la podemos obtenemos de la expresión (4) imponiendo la condición de que R = 0 cuando θ es 90º.

$$0=m\left(\frac{u_{min}^2}{a}-g(2+3\cdot\sin 90)\right) \Rightarrow u_{min}^2=5ag \Rightarrow u_{min}=\sqrt{5ag}$$

Dado que la velocidad u< u_{min} la bola no completaría la vuelta.

Justo en el instante de perder el contacto con la superficie, la reacción sobre la bola es nula. Por tanto, sustituyendo la expresión de u en (4) e imponiendo la condición de que R = 0, resulta

$$0=m\left(\frac{u^2}{a}-g(2+3\cdot\sin\theta)\right) \Rightarrow 0=m\left(\frac{3ag}{a}-g(2+3\cdot\sin\theta)\right) \Rightarrow 3g-2g-3g\sin\theta=0 \Rightarrow$$

$$1=3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{1}{3} \Rightarrow \theta=19°28'16.39''$$

8° A stone, of mass m, is moving in a straight line along smooth horizontal ground.

At time t, the stone has speed v. As the stone moves, it experiences a total resistance force of magnitude $-\lambda m v^{3/2}$, where λ is a constant. No other horizontal force acts on the stone.

(a) Show that 3 $\frac{dv}{dt}=-\lambda v^{3/2}$ (2 marks)

(b) The initial speed of the stone is 9 m s^{-1}.Show that $v=\frac{36}{(2+3\lambda t)^2}$ (7 marks)

(c) Find, in terms of λ, the time taken for the speed of the stone to drop to 4 m s^{-1}. (3 marks)

a.

Aplicando la segunda ley de Newton $\sum\vec{F}=m\vec{a}$, resulta

$$-\lambda m v^{3/2}=m\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\lambda v^{3/2}=\frac{dv}{dt} \quad (1)$$

b.

De la ecuación (1), integrando y poniendo los límites de integración a t = 0 v = 9 y en un instante cualquiera t la velocidad es v, resulta

$$-\lambda v^{3/2}=\frac{dv}{dt} \Rightarrow -\int_0^t \lambda dt=\int_9^v \frac{dv}{v^{3/2}} \Rightarrow -\lambda t=-2v^{-1/2}\Big|_9^v \Rightarrow -\lambda t=\frac{2}{3}-\frac{2}{\sqrt{v}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{v}}=\frac{2}{3}+\lambda t \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{v}}=2+3\lambda t \Rightarrow \frac{36}{v}=(2+3\lambda t)^2 \Rightarrow v=\frac{36}{(2+3\lambda t)^2} \quad (2)$$

c.

De la ecuación (2) imponiendo la condición v = 4 resulta,

$$4=\frac{36}{(2+3\lambda t)^2} \Rightarrow (2+3\lambda t)^2=\frac{36}{4} \Rightarrow 2+3\lambda t=\pm 3 \Rightarrow \begin{cases} 2+3\lambda t=3 \Rightarrow t=\frac{1}{3\lambda} \\ 2+3\lambda t=-3 \Rightarrow t=-\frac{1}{3\lambda} \end{cases}$$

De las dos soluciones posibles nos quedamos con la positiva ya que t debe ser mayor que 0.