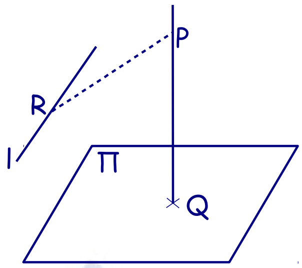
8 The point Q has position vector $\vec{q}=\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}$ **the plane Π has equation** $\vec{r}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=36$ **and the line l has equation** $\vec{r}=\begin{bmatrix}20\\-8\\1\end{bmatrix}+\mu\cdot\begin{bmatrix}-7\\5\\3\end{bmatrix}$.

(a) Show that Q lies in Π. **(1 mark)**

(b) Show also that l is parallel to Π. **(2 marks)**

(c) The diagram shows the point P, which lies on the normal to Π that passes through Q. The point R is the point on l which is closest to P, and PQ = PR. Determine the coordinates of P. **(9 marks)**



(a)

Si Q pertenece al plano Π, sustituyendo $\vec{r}$ por $\vec{q}$ en la ecuación del plano, debe cumplirse $\vec{q}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=36$

$\begin{bmatrix}7 & 4 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=14+4+18=36$ por tanto Q $\in$ Π.

(b)
Si la recta l es paralela al plano Π entonces el vector director $\vec{u}$ de la recta debe ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ del plano, por tanto $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$. $\begin{bmatrix}-7 & 5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}=-14+5+9=0$, por tanto l es paralela a Π.

(c)
Sea m la recta que pasa por P y Q. El vector director de esta recta es el vector normal del plano, por tanto la ecuación de la recta m es $\vec{r}=\begin{bmatrix}7\\4\\6\end{bmatrix}+\lambda\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$. Las rectas l y m son perpendiculares.

Como R es el punto de l más próximo a m, R es el punto de m donde se cruzan dichas rectas. Hallo el plano Σ que contiene a Q y es perpendicular a l. El vector director $\vec{u}$ de l será el vector normal del plano que busco, por tanto

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{QX}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix}-7 & 5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x-7\\y-4\\z-6\end{bmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -7x+5y+3z=-11$$

Cruzando el plano Σ con la recta l obtendremos R. Sustituyendo las ecuaciones paramétricas de l en el plano Σ obtenemos

$$-7(20-7\mu)+5(-8+5\mu)+3(1+3\mu)=-11 \quad\Rightarrow\quad 83\mu=166 \quad\Rightarrow\quad \mu=2$$

Sustituyendo el valor de μ en la recta l obtendremos las coordenadas del punto R.

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Imponemos la condición de las distancias PQ = PR, siendo P un punto genérico de la recta m, es decir $\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Como $PQ^2 = PR^2$ y por tanto

$$(7-7-2\lambda)^2+(4-4-\lambda)^2+(6-6-3\lambda)^2=(6-7-2\lambda)^2+(2-4-\lambda)^2+(7-6-3\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$4\lambda^2+\lambda^2+9\lambda^2=(-1-2\lambda)^2+(-2-\lambda)^2+(1-3\lambda)^2 \Rightarrow 4\lambda^2+\lambda^2+9\lambda^2=1+4\lambda+4\lambda^2+4+4\lambda+\lambda^2+1-6\lambda+9\lambda^2 \Rightarrow$$

$$0=6+2\lambda \Rightarrow \lambda=-3$$

Por tanto las coordenadas del punto P son

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$