OPCIÓN A

1. Tenemos tres grifos para llenar un depósito de agua donde suponemos que el caudal que cae por cada grifo es constante. Si usamos el grifo 1, tardamos 10 horas en llenar el depósito, si usamos los grifos 1 y 2, tardamos 4 horas y si usamos los tres, tardamos una hora. Suponiendo que la suma de los caudales de los tres grifos es de 10 litros por minuto, hallar el caudal del agua de cada grifo (8 puntos) y el volumen del depósito (2 puntos).

	Tiempo en horas en llenar el depósito	Fracción del depósito que se llena en 1 hora
G_1	10	$\frac{1}{10}$
$G_1 + G_2$	4	$\frac{1}{4}$
$G_1 + G_2 + G_3$	1	$\frac{1}{1}=1$

Cuando abrimos varios grifos a la vez el caudal total será la suma de los caudales individuales.

Como el caudal de los tres grifos es de 10 L/min.=600 L/h y llenan el depósito en 1 hora concluimos que el volumen es de 600 L. Como el grifo 1 tarda 10 h en llenar el depósito concluimos que su caudal es de $\frac{600\,L}{10\,h}=60\,L/h$. Como el grifo 1 y 2 llenan el depósito en 4 h concluimos que su caudal conjunto es $\frac{600\,L}{4\,h}=150\,L/h$ y como el primero tiene un caudal de 60 L/h concluimos que el grifo 2 tiene un caudal de 90 L/h. Como el caudal de los tres es de 600 L/h y los dos primeros tienen un caudal conjunto de 150 L/h concluimos que el caudal del tercero es 450 L/h,

Solución $\boxed{V_{depósito}=600\,L \;,\; G_1=60\,L/h \;,\; G_2=90\,L/h \;,\; G_3=450\,L/h}$

OPCIÓN B

1. a) Discutir para qué valores de m el sistema siguiente es compatible:

$$\left.\begin{matrix} mx+3z=m \\ x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=2 \end{matrix}\right\}$$

b) Resolvedlo en el caso o casos en que sea compatible indeterminado.

a.

Empezamos calculando el determinante de la matriz de los coeficientes A y determinamos para que valores de m se anula.

$$A=\begin{vmatrix} m & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2m+3-12+m=-m-9 \quad \Rightarrow \quad -m-9=0 \quad \Rightarrow \quad m=-9$$

+ Si m ≠ -9 $\Rightarrow$ $\text{Ran}(A)=3=\text{Ran}(A^*)$ $\Rightarrow$ $S.C.D.$

+ Si m = -9 $\Rightarrow$ $A^*=\begin{pmatrix} -9 & 0 & 3 & -9 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -9 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{Ran}(A)=2,$ como $C_1=C_4 \Rightarrow \text{Ran}(A^*)=\text{Ran}(A)=2 \Rightarrow S.C.I$

Para cualquier valor de m el sistema será compatible.

b.

El sistema equivalente nos queda $\begin{cases} -9\cdot x+3\cdot z=-9 \\ x+2\cdot y-z=1 \end{cases}$, es decir eliminamos la fila que no hemos utilizado para probar que el Ran(A)=2 y parametrizamos la variable que no hemos usado para decir que Ran(A)=2, es decir z. $z=3\cdot\lambda \in \mathbb{R}$, tomamos $3\cdot\lambda$ para que no queden fracciones, $\begin{cases} -9\cdot x+9\cdot\lambda=-9 \\ x+2\cdot y-3\cdot\lambda=1 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda+1 \;,\; y=\lambda \; \boxed{(x,y,z)=(\lambda+1,\lambda,3\cdot\lambda)}$

2. El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar vienes dad por la función siguiente: $Q(t)=-\frac{t^3}{8}+\frac{3\cdot t^2}{2}-\frac{9\cdot t}{2}+10$, donde t viene en días y está entre el día t = 1 (lunes) hasta el día t = 8 (lunes de la otra semana).
a) Hallar el día d ella semana que llovió más y el que llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió estos dos días? (6 puntos)
b) Hacer un pequeño gráfico de la función anterior durante 8 días. (4 puntos)

a.

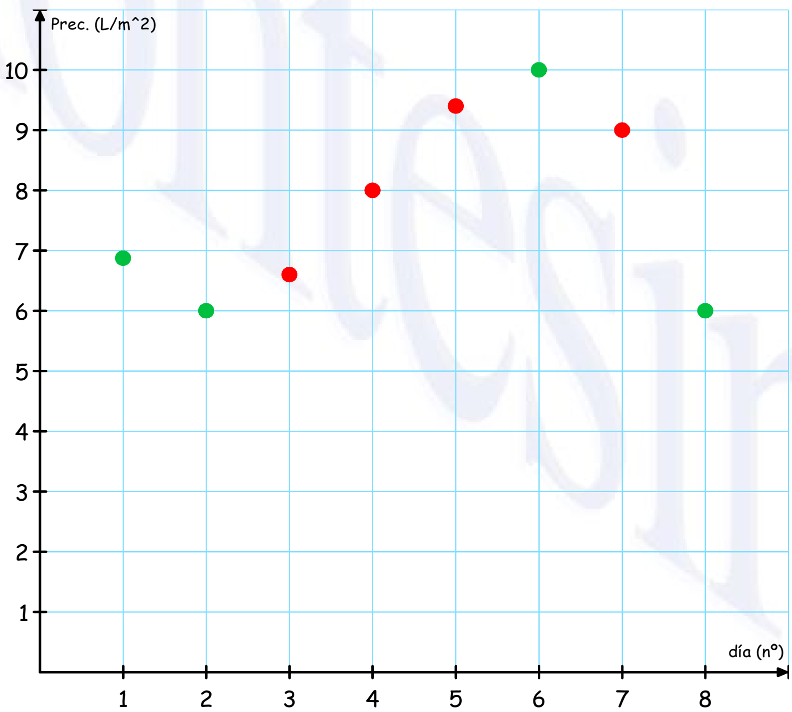
Buscaremos los máximo y mínimos relativos a partir de la derivada de la función $Q'(t)=-\frac{3\cdot t^2}{8}+3\cdot t-\frac{9}{2}$ e igualamos a cero para buscar los posibles extremos relativos. $-3\cdot t^2+24\cdot t-36=0$ $t=\frac{-24\pm\sqrt{24^2-4\cdot 3\cdot 36}}{-6}=\frac{-24\pm 12}{-6}=\begin{cases}6\\2\end{cases}$ .Al ser una función definida en un intervalo deberemos incluir los extremos, ya que podrían ser máximo o mínimos absolutos.

	1		2		6		8
f'		-	0	+	0	-	
f	$\frac{55}{8}$	↘	6	↗	10	↘	6

El máximo se alcanza en t = 6, es decir el sábado que llovió 10 L/m^2 y el mínimo se alcanza en t = 2 y 8, es decir el martes y el lunes de la siguiente semana, en los que se recogieron 6 L/m^2.

b.

La función está definida sólo para los enteros en el intervalo [1,8]. En verde se han representado los valores calculados y en rojo los estimados.



3. Dadas las rectas $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ y $s: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$

a) Demostrar que se cruzan (4 puntos)

b) Hallar la distancia entre ellas (6 puntos)

a.

Tomamos los vectores directores de cada recta y generamos un vector a partir de dos puntos uno perteneciente a cada recta. El determinante de estos tres elementos debe ser distinto de cero para que las rectas se crucen.

$$\vec{d}_r=(2,3,-1)\ ,\ \vec{d}_s=(1,2,-2)\ ,P\in r\ (1,0,-1)\ ,Q\in s\ (0,2,-1)\ \Rightarrow\ \overrightarrow{PQ}=(-1,2,0)\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2+6-2+8\neq 0$$

b.

$$\text{dist}(r,s)=\frac{[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{PQ}]}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}\ \Rightarrow\ [\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{PQ}]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2+6-2+8=10\ \Rightarrow\ \vec{d}_r \times \vec{d}_s=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-4\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$$

$$|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|=\sqrt{(-4)^2+3^2+1^2}=\sqrt{26}\ \Rightarrow\ \text{dist}(r,s)=\frac{[\vec{d}_r,\vec{d}_s,\overrightarrow{PQ}]}{|\vec{d}_r \times \vec{d}_s|}=\frac{10}{\sqrt{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{13}\ u$$

$$\boxed{\text{dist}(r,s)=\frac{10}{\sqrt{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{13}\ u}$$

4. Lanzamos dos dados de 6 caras y consideramos los sucesos siguientes:

S_7: "la suma de los resultados de lso dos dado ses 7".
P: "el producto de los resultados de os dos dados es impar".

a) Hallar la probabilidad de que ocurran los sucesos anteriores. (6 puntos)
b) ¿Son independientes S_7 y P? Razonar la respuesta. (4 puntos)

a.

En las siguientes tabla se muestran en la primera fila el resultado del lanzamiento de un dado y en la primera columna los posibles resultados del lanzamiento del segundo dado. Se muestra la suma S o producto P de los resultados

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$\boxed{P(\text{suma}=7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}}$ $\boxed{P(\text{producto impar})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}}$

b.

Dos sucesos son independientes si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. En este caso $P(\text{suma}=7\cap \text{producto impar})=0$, es decir en todos los casos en los que la suma es 7 el producto es par. Por tanto $\boxed{P(A\cap B)\neq P(A)\cdot P(B)}$ y los sucesos son dependientes.